

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES
Institut d'Estudis Catalans

— í n d e x —

- ☐ *Natàlia Castellana*
Hi havia una vegada un punt fix 99
- ☐ *Carlos D'Andrea*
Ideals de corbes mòbils i la seva interacció amb el disseny
assistit per ordinador 121
- ☐ *Joan Girbau*
Detecció d'ones gravitatòries 143
- ☐ *Joan Carles Naranjo*
Fonaments geomètrics de la reconstrucció 3D 179
- ☐ English summaries 195



Volum 31 • Número 2 • Any 2016



Institut
d'Estudis
Catalans

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA

DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Volum 31 • Número 2 • Desembre 2016

BARCELONA
2016

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona

Text revisat lingüísticament
per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC.

Imprès a Limpergraf, SL

ISSN: 0214-316-X
Dipòsit Legal: B 19272-1987

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

Índex

NATÀLIA CASTELLANA	
Hi havia una vegada un punt fix	99
CARLOS D'ANDREA	
Ideals de corbes mòbils i la seva interacció amb el disseny assistit per ordinador	121
JOAN GIRBAU	
Detecció d'ones gravitatòries	143
JOAN CARLES NARANJO	
Fonaments geomètrics de la reconstrucció 3D	179
English summaries	195

Hi havia una vegada un punt fix...

NATÀLIA CASTELLANA

Dedicat a la Laia, que m'ensenya cada dia a
(ad)mirar les coses amb senzillesa.

Resum: Un dels resultats clàssics que trobem en la majoria de llibres de topologia algebraica és el teorema del punt fix de Brouwer, que utilitza tècniques d'espais recobridors, càlcul de grup fonamental i grups d'homologia. En aquest article presentarem una demostració basada en un lema de combinatòria topològica, el lema de Sperner, que fa accessible la demostració sense el coneixement de les tècniques abans mencionades.

Paraules clau: topologia algebraica, combinatòria, punt fix.

Classificació MSC2010: 55M20, 91A06.

1 Introducció

Un dels resultats clàssics que trobem en la majoria de llibres on es fa una introducció a la topologia algebraica és el teorema del punt fix de Brouwer (1912), que ens diu que tota aplicació contínua f de la bola de dimensió n , B^n , en sí mateixa té almenys un punt fix (és a dir, existeix $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$).

TEOREMA DEL PUNT FIX DE BROUWER (1912). *Sigui B^n una bola de dimensió n . Tota aplicació contínua $f: B^n \rightarrow B^n$ té almenys un punt $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.*

Brouwer [2] demostra el resultat per a boles n -dimensionals utilitzant la noció de grau d'una aplicació contínua. En dimensió 2, aquest resultat apareix en molts llibres de text com una conseqüència del càlcul del grup fonamental del cercle S^1 i del fet que aquest grup no és trivial. En dimensions superiors s'usen altres eines de topologia algebraica com els grups d'homologia singular. Aquest resultat és equivalent al fet que les esferes no són contràctils.

Aquest article es basa en la lliçó inaugural del curs acadèmic 2015–2016 dels graus de matemàtiques, física i matemàtiques, estadística aplicada i estadística aplicada i sociologia de la Universitat Autònoma de Barcelona, impartida per l'autora.

Des d'un punt de vista més distès, aquest és un resultat que es pot explicar tot prenent una tassa de cafè. Si la taula té estovalles, penseu que cada punt de la superfície de la taula s'identifica amb un punt de les estovalles que té a sobre. Tot seguit, agafeu les estovalles, gireu-les, arrugueu-les..., i de qualsevol manera torneu-les a deixar a sobre de la taula (sobre tota o part de la superfície que ocupaven abans); aleshores hi ha almenys un punt de les estovalles que torna a estar en la vertical de la posició que ocupava abans. I si la taula no té estovalles? Fixeu-vos en la tassa de cafè. De manera informal, cada partícula de cafè ocupa una posició a l'interior de la tassa. Tot seguit remeneu el contingut de la manera que vulgueu (en un sentit, en l'altre, fent vuits...) i, quan el cafè torni a quedar quiet, afirmem que almenys una partícula està ocupant la mateixa posició que ocupava abans de remenar.

Donant una ullada al llibre *Introduction to Topology* [7], escrit per Solomon Lefschetz, veiem en l'índex que el teorema del punt fix de Brouwer per a la bola de dimensió n apareix demostrat molt abans del capítol en què s'introdueix el grup fonamental. Tot just s'han introduït els complexos simplicials. Si anem a la pàgina 117 d'aquest llibre, hi trobem el teorema 6.1, que es justifica de la manera següent:

(6.1) Theorem. *Every mapping of the closed n -cell (= n -disk) into itself has a fixed point (Brouwer).*

The proof merely requires the Sperner lemma in the form (5.5) and the existence of subdivisions of arbitrarily small mesh.

Atenció, només ens calen dos ingredients: el lema de Sperner i el procés de subdivisió baricèntrica. Molts segurament ja coneixeu el procés de subdivisió baricèntrica; així doncs, començarem la nostra aventura amb el lema de Sperner.

Les primeres quatre seccions estan dedicades a explicar la demostració d'aquest lema i, també, alguna de les aplicacions a problemes de repartiment just de béns. Per a la darrera secció tornarem a agafar el llibre de Lefschetz per la pàgina 134, on comença la secció dedicada a un altre dels teoremes clàssics en topologia algebraica: el teorema de Borsuk-Ulam. Com podem explicar aquest resultat prenent el sol a la platja? Agafem una pilota de platja inflada i aparellem tots els seus punts antipodals. Ara, la desinflen i la deformem de la manera que ens sembli. Tot seguit la posem a terra de qualsevol manera. Aleshores afirmem que almenys hi ha una parella de punts antipodals en la mateixa vertical.

TEOREMA DE BORSUK-ULAM. *Sigui $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua. Aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

El primer paràgraf de la secció IV.7 de [7] diu:

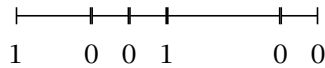
The material in the present section has been communicated to the author by A. W. Tucker. A certain algebraic lemma resembling Sperner's lemma is first established and various known theorems are then deduced from the lemma.

Explicarem breument com es pot escriure una història paral·lela a partir del lema de Tucker amb uns actors diferents.

2 El lema de Sperner

El lema de Sperner és un lema de combinatòria topològica sobre subdivisions de símplex. Comencem explicant què diu aquest lema en els casos de dimensió 1 i 2.

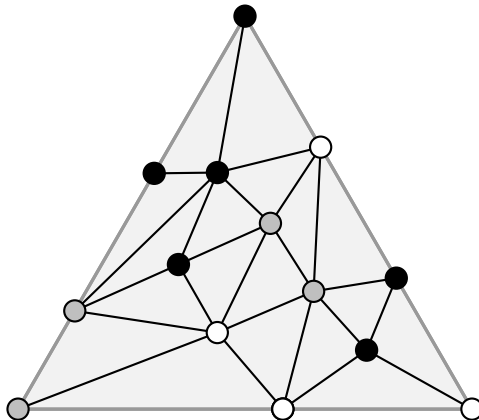
Sigui I l'interval $[0, 1]$. El subdividim en n subintervals amb els punts $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1 = x_n$. Ara etiquetem els vèrtexs x_i , $i = 0, \dots, n$, amb 0 o 1 amb l'única condició que els extrems, $\{0, 1\} \in I$, tinguin etiquetes diferents. Direm que un subinterval és de tipus (a, b) si els seus extrems estan etiquetats amb a en un vèrtex i b en l'altre. Aleshores hi ha un nombre senar de subintervals de tipus $(0, 1)$. Per què?



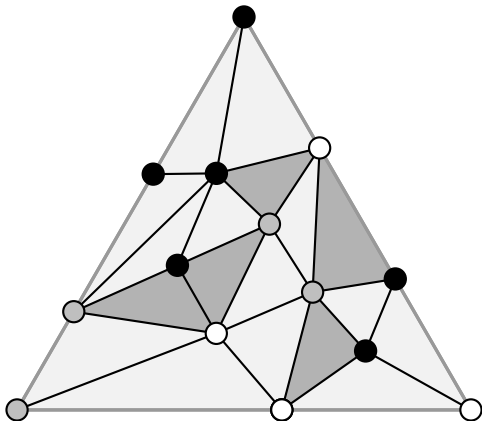
Per a cada subinterval comptem quants zeros té en els seus extrems i fem la suma sobre tots els intervals. Aquesta suma total és igual al nombre de subintervals de tipus $(0, 1)$ més dues vegades la suma de subintervals de tipus $(0, 0)$. Per tant, si provem que aquest nombre és senar ja haurem acabat. Ara bé, fixeu-vos que aquest nombre és també igual al doble de vèrtexs interiors amb etiqueta 0 més 1 (el que correspon a l'extrem amb etiqueta 0). Per tant, aquesta suma és senar i ja ho tenim.

Ara, vegem com es podria generalitzar aquesta situació a dimensió 2. Sigui T un triangle amb una subdivisió del seu interior en regions també triangulars (dues regions tenen intersecció o bé buida, o bé en una aresta sencera o bé en un vèrtex).

Els vèrtexs d'aquesta subdivisió estan etiquetats amb elements del conjunt $\{0, 1, 2\}$, però de manera que se satisfan dues condicions. La primera és que els vèrtexs principals del triangle T tenen etiquetes diferents, i la segona és que l'etiqueta corresponent a un vèrtex situat en una de les arestes de T només pot tenir una de les dues etiquetes que apareixen en els vèrtexs situats a la vora de l'aresta.



Aleshores el lema de Sperner ens dirà que almenys hi ha un triangle de la subdivisió que té els vèrtexs etiquetats usant tots tres elements del conjunt $\{0, 1, 2\}$ i, de fet, n'hi ha un nombre senar.



Es pot provar fàcilment. Presentarem dues demostracions: una en què només es mostra l'existència d'aquests triangles i una altra de més constructiva.

La primera demostració es basa en un argument combinatori com en el cas del segment que hem vist abans. Direm que un triangle és de tipus (a, b, c) si els seus vèrtexs tenen les tres etiquetes $\{a, b, c\}$. Considerem ara les quantitats següents:

1. Q és el nombre de triangles de tipus $(0, 0, 1)$ o $(0, 1, 1)$.
2. R és el nombre de triangles de tipus $(0, 1, 2)$.
3. X és el nombre d'arestes de tipus $(0, 1)$ situades a la vora de T .
4. Y és el nombre d'arestes de tipus $(0, 1)$ interiors a T .

Aleshores podem comptar el nombre total d'arestes de tipus $(0, 1)$, un cop desmuntat el triangle, de dues maneres: a través de les arestes o a través dels triangles. Obtenim la igualtat següent:

$$2Q + R = 2Y + X.$$

Només hi ha arestes exteriors tipus $(0, 1)$ en un dels costats del triangle T , aquell costat tal que els seus vèrtexs tenen etiquetes 0 i 1. Si ens fixem, doncs, en aquesta aresta, tenim un segment subdividit i etiquetat de manera que els extrems tenen valors diferents. Aquest és el cas en dimensió 1 que tot just acabem de demostrar. Observem, doncs, que X és senar. Per tant, també $2Q + R$ és un número senar i, en particular, R és senar. Així, hi ha un nombre senar de triangles tipus $(0, 1, 2)$. En concret, almenys n'hi ha un.

La segona demostració s'explica amb una història i té un caràcter constructiu. Imagineu que el triangle amb la subdivisió és la planta d'un laberint d'habitacions triangulars de manera que només hi ha portes a les parets tipus $(0, 1)$. Ja sabem que només hi ha portes d'entrada en un dels costats del triangle, i a

més n'hi ha un nombre senar. Dins del laberint hi ha tres tipus d'habitacions: sense portes en cap de les seves parets (mai no hi podrem accedir), amb dues portes i amb una sola porta. Les habitacions amb una sola porta són el nostre objectiu: les del tipus $(0, 1, 2)$.

Què hem de fer per arribar a una habitació de tipus $(0, 1, 2)$? Entrem al laberint per una porta exterior (n'hi ha un nombre senar) i ens fem en la primera habitació. Només tenim dues opcions: ja hem trobat l'habitació que buscàvem de tipus $(0, 1, 2)$ perquè només té una porta, o bé té dues portes. En el segon cas traïem la porta que no hem utilitzat i entrem en una nova habitació, i aquí podem repetir l'argumentació anterior. Com que hi ha un nombre finit d'habitacions, o bé acabarem el camí en una de tipus $(0, 1, 2)$, o bé aquest camí ens portarà cap a l'exterior un altre cop. Si sortim a l'exterior, segur que podem tornar a entrar per una porta que no hàgim utilitzat abans, ja que, com sabem, n'hi ha un nombre senar. Així que tard o d'hora trobarem una habitació de tipus $(0, 1, 2)$. Fixeu-vos que hem descrit un algorisme per trobar almenys un triangle tipus $(0, 1, 2)$. Podem afirmar que n'hi ha un nombre senar? De les que són accessibles des de l'exterior, sí que podem dir que n'hi ha un nombre senar. Però hi pot haver habitacions de tipus $(0, 1, 2)$ interiors a les quals no accedim amb aquest mètode. Bé, però fixeu-vos que han d'anar aparellades perquè si comencéssim el recorregut en una d'elles, a la força hauríem d'acabar en una altra del mateix tipus.

Noteu que en les dues demostracions hem provat el següent: donat un polígon amb una triangulació a la qual s'han assignat etiquetes $\{0, 1, 2\}$ als vèrtexs, el nombre de triangles de tipus $(0, 1, 2)$ és congruent amb el nombre d'arestes de tipus $(0, 1)$ (amb multiplicitat) mòdul 2. La condició sobre les etiquetes a la vora només ens assegura que aquests nombres són senars.

Ara que ja tenim una mica d'intuïció sobre el que serà el lema de Sperner, introduïrem els conceptes necessaris per enunciar-lo en general.

DEFINICIÓ 1. Donats $n + 1$ punts independents de manera afi a $\mathbb{R}^m$ amb $m \geq n$, $\{p_0, \dots, p_n\}$, un n -simplex Δ és l'embolcall convex d'aquest conjunt de punts. Cada subconjunt finit de $k + 1$ elements de $\{p_0, \dots, p_n\}$ determina un sub-simplex de dimensió k que s'anomena una k -cara de Δ .

En particular, cada $x \in \Delta$ es pot expressar com una combinació lineal d'aquests punts $x = \sum \alpha_i p_i$, on $\sum \alpha_i = 1$ i $\alpha_i \geq 0$ per a cada i . Els coeficients α_i són les coordenades baricèntriques corresponents al punt $x \in \Delta$, $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Una propietat dels simplexs que farem servir més endavant és el fet que són tancats i acotats dins $\mathbb{R}^n$ per a algun n , i per tant són compactes.

DEFINICIÓ 2. Una *triangulació* d'un n -simplex Δ és una col·lecció finita de n -simplexs tals que la seva unió és Δ , amb la propietat que si dos d'aquests simplexs s'intersequen, aleshores ho fan en una cara sencera comuna a tots dos.

Definim ara en què consisteix en general etiquetar una triangulació d'un simplex.

DEFINICIÓ 3. Donat un n -simplex S amb una triangulació, un *etiquetatge de S* amb etiquetes $\{0, 1, \dots, n\}$ és una aplicació L del conjunt de vèrtexs al conjunt $\{0, 1, \dots, n\}$. Direm que L és un *etiquetatge propi* si es compleixen les dues condicions següents:

1. Els vèrtexs $p_i = (0, \dots, 1^{i+1}, \dots, 0)$, per a $i = 0, \dots, n$, tenen etiquetes diferents, $L(p_i) \neq L(p_j)$, per a tot $i \neq j \in \{0, 1, \dots, n\}$.
2. Les etiquetes utilitzades en una cara de dimensió $n - 1$ determinada per un subconjunt $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_n}\}$ de vèrtexs corresponen al conjunt $\{L(p_{i_1}), \dots, L(p_{i_n})\}$.

Direm que un n -subsimplex de la triangulació és distingit quan els seus $n + 1$ vèrtexs utilitzen totes les etiquetes, és a dir, és de tipus $(0, 1, \dots, n)$.

LEMA DE SPERNER (1928) [14]. *Donada una triangulació amb un etiquetatge propi d'un n -simplex, hi ha un nombre senar de n -simplexs distingits a la triangulació.*

PROVA. Ja hem demostrat els casos $n = 1$ i $n = 2$. Suposem, doncs, que el resultat és cert per a simplexs de dimensions menors que n . Sigui K un n -simplex amb una triangulació i un etiquetatge propi. Considerem les quantitats següents:

1. Q és el nombre de n -simplexs de tipus $(0, 1, \dots, n - 1, i)$, on $i = 0, 1, \dots, n - 1$.
2. R és el nombre de n -simplexs de tipus $(0, 1, \dots, n)$, és a dir, distingits.
3. X és el nombre de $(n - 1)$ -simplexs de tipus $(0, 1, \dots, n - 1)$ a la vora.
4. Y és el nombre de $(n - 1)$ -simplexs de tipus $(0, 1, \dots, n - 1)$ interiors.

Se satisfà la igualtat $2Q + R = X + 2Y$. El lema de Sperner per a dimensió $n - 1$ ens diu que X és senar: noteu que els $(n - 1)$ -simplexs a la vora de tipus $(0, 1, \dots, n - 1)$ només es troben en una de les cares de dimensió $n - 1$, aquella determinada per aquells vèrtexs principals p_i amb etiqueta al subconjunt $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Per tant, de la igualtat deduïm que R ha de ser també senar.

Així mateix, es pot demostrar de manera constructiva imitant l'argument donat per al cas $n = 2$. És a dir, si imaginem que només podem travessar els $(n - 1)$ -simplexs de tipus $(0, 1, \dots, n - 1)$. Aleshores dins la triangulació hi haurà n -simplexs amb una sola entrada, que són els distingits; dues entrades, o cap. El mateix raonament que hem fet servir per al cas de dimensió 2 ens porta a la mateixa conclusió. $\square$

2.1 Sabíeu que...

Emanuel Sperner (1905–1980) va ser un matemàtic alemany. El 1934 fou cate-dràtic a Königsberg (actual Kaliningrad), ciutat coneguda entre els matemàtics perquè és la ciutat on se situa el problema dels ponts que va resoldre Leonhard Euler. També va ser membre fundador del centre de recerca Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Alemanya).

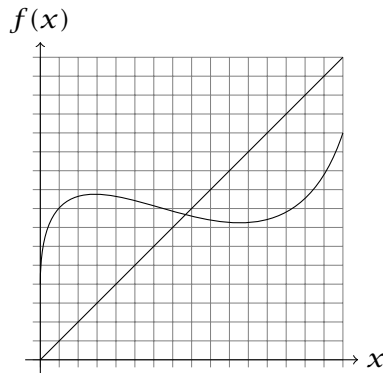
El lema de Sperner apareix per primera vegada a l'article [14] en un context diferent del teorema del punt fix de Brouwer. Posteriorment a [6] es va veure que el lema permetia donar una demostració d'aquest resultat.

3 El teorema del punt fix de Brouwer

En aquesta secció demostrarem el teorema del punt fix de Brouwer a partir del lema de Sperner i el procés de subdivisió baricèntrica, tal com es troba en el llibre [7].

La propietat del punt fix en un espai topològic es preserva per homeomorfismes; és a dir, si tota aplicació contínua d'un espai topològic X en si mateix té un punt fix i Y és homeomorf a X , és fàcil comprovar que Y té la mateixa propietat. Així, a la resta de la secció demostrarem el teorema del punt fix de Brouwer veient que el n -simplex té la propietat del punt fix. Serà suficient, ja que és homeomorf a la bola de dimensió n .

Abans de començar la demostració del teorema del punt fix de Brouwer, repassem el cas $n = 1$ que s'explica en l'assignatura de càlcul de primer: tota aplicació contínua f de l'interval $I = [0, 1]$ en si mateix té un punt fix.

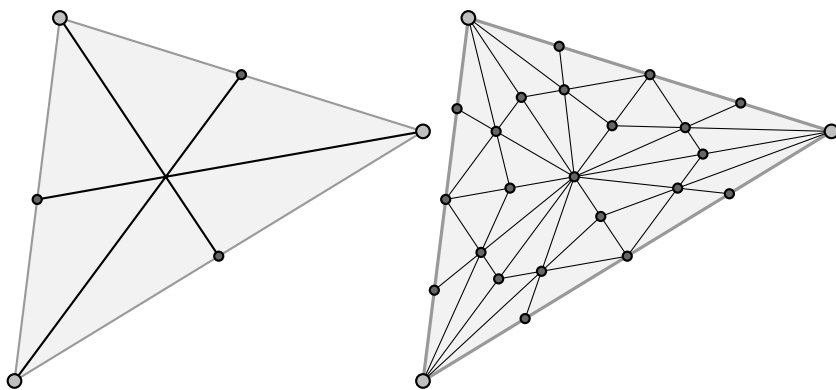


La demostració es basa a fer particions fines de l'interval $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1 = x_n$. Suposem que f no té cap punt fix. Etiquetem cada punt x_i de la partició segons $f(x_i) > x_i$ o $f(x_i) < x_i$. Aleshores, els extrems tenen etiquetes diferents i el lema de Sperner per a $n = 1$ ens diu que hi ha subinterval amb etiquetes diferents. Els extrems d'aquests subintervals per a una successió de particions de l'interval cada cop més fines ens donaran successions de punts que convergeixen a un mateix $x^* \in I$ complint a la vegada $f(x^*) \geq x^*$ i $f(x^*) \leq x^*$. En aquesta demostració, d'entrada hi ha tres elements clau: les particions de l'interval en subintervals de longitud tan petita com vulguem, el lema de Sperner en dimensió 1 i el fet que I és compacte.

Comencem recordant breument el procés de la subdivisió baricèntrica, que serà l'eina tècnica principal de la demostració, juntament amb el lema de Sperner.

DEFINICIÓ 4. Donat un n -símplex S amb vèrtexs $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, el baricentre $b \in S$ és el punt de coordenades $b = \frac{1}{n+1} \sum p_i$.

Amb els baricentres de tots els subsímplexs de S tenim un procediment per a construir triangulacions d'una manera estàndard en un procés que es pot repetir. El descriurem informalment. Comencem amb els 1-símplexs o arestes. Afegim el baricentre de cadascun i considerem les noves arestes que apareixen. Ara mirem els 2-símplexs o triangles, hi afegim el baricentre com un nou vèrtex i totes les arestes que van als vèrtexs que ja teníem; això no només crea noves arestes sinó també una triangulació del 2-subsímplex. I anem iterant aquest procés, afegint el baricentre i creant tots els subsímplexs necessaris que el contenen. Una imatge val més que mil paraules...



Observeu que, en la nova triangulació, el màxim dels diàmetres de tots els símplexs ha disminuït respecte a la triangulació anterior. Aquest procés de subdivisió baricèntrica es pot iterar tantes vegades com sigui necessari, de manera que els diàmetres dels símplexs siguin tan petits com calgui: donat $\epsilon > 0$, existeix $n \geq 0$ tal que el màxim dels diàmetres dels símplexs de la triangulació obtinguda iterant n vegades (o més) el procés de subdivisió baricèntrica és menor que ϵ .

Ja tenim els ingredients necessaris per demostrar el teorema del punt fix de Brouwer tal com indica Lefschetz al seu llibre [7]: subdivisió baricèntrica, el lema de Sperner i el fet que els símplexs són compactes.

PROVA DEL TEOREMA DEL PUNT FIX DE BROUWER. Sigui S un n -símplex amb vèrtexs $p_i = (0, \dots, 1^{i+1}, \dots, 0)$, $i = 0, \dots, n$ en coordenades baricèntriques. Suposem que $f: S \rightarrow S$ és una aplicació contínua sense punts fixos, és a dir, $f(x) \neq x$ per a tot $x \in S$.

Construïm una successió $\{S_1, S_2, \dots\} = \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de triangulacions de S , de manera que cada S_j és una triangulació de l'anterior S_{j-1} i tal que el màxim dels diàmetres en cadascuna tendeix a zero quan j es fa gran. Aquesta successió existeix prenent iteracions de la subdivisió baricèntrica.

Fixem una triangulació S_j i etiquetem els seus vèrtexs de la manera següent. Donat un vèrtex $x = (x_0, \dots, x_n)$ en coordenades baricèntriques, aleshores

$L(x) = i$ si i és l'índex més petit tal que la coordenada i -èsima compleix $f(x)_i < x_i$. Com que $\sum f(x)_i = \sum x_i = 1$ i $f(x) \neq x$, aquest etiquetatge està ben definit. Comprovem ara que és propi.

Es compleix la primera condició, ja que $L(p_i) = i$. Els punts $x \in S$ que es troben a la cara de dimensió $n - 1$ determinada per $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_n}\}$ tenen la característica que una de les coordenades (la del vèrtex que no apareix a la llista) sempre és zero. Aleshores $L(x)$ mai no prendrà el valor corresponent en aquesta coordenada, és a dir, $L(x) \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Per tant, el lema de Sperner ens diu que hi ha almenys un n -simplex distingit a S_j amb vèrtexs $\{z^{j,0}, \dots, z^{j,n}\}$, on $L(z^{j,i}) = i$.

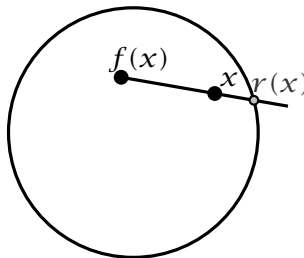
Hem construït una successió de simplexs. Ara farem servir que el n -simplex és compacte: tota successió de punts a S té una successió parcial convergent. Prenem la successió formada pels vèrtexs $\{z^{j,0}\}$: sabem que hi ha una successió parcial convergent cap a un punt z^0 . La continuïtat de f ens assegura que $f(z^0)_0 \leq z^0_0$. Descartem els triangles que no formen part d'aquesta successió parcial convergent i repetim el mateix argument amb la successió de vèrtexs $\{z^{j,1}\}$; i així obtenim z^1 , amb $f(z^1)_1 \leq z^1_1$. Com que els punts són vèrtexs de triangles amb diàmetre que tendeix a zero, tenim també que els límits coincideixen, $z^1 = z^0$. Repetint aquest procés fins a $\{z^{j,n}\}$, obtenim un punt z^* que compleix $f(z^*)_i \leq z^*_i$ per a tot $i = 0, \dots, n$. Però això només és possible si $f(z^*)_i = z^*_i$ per a tot i , arribant així a una contradicció. $\square$

El teorema del punt fix de Brouwer acostuma a presentar-se com a conseqüència del fet que l'esfera S^{n-1} no és un retracte de la bola B^n . Però són enunciatos equivalents; per tant, a partir del lema de Sperner també demostrem aquest fet.

PROPOSICIÓ 5. *Són equivalents:*

1. Tota aplicació contínua $f: B^n \rightarrow B^n$ té un punt fix.
2. No hi ha cap aplicació contínua $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ tal que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$.

PROVA. Suposem que existís una aplicació contínua $f: B^n \rightarrow B^n$ sense punts fixos. Aleshores definim $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ de la manera següent: donat $x \in B^n$, sigui $r(x) \in S^{n-1}$ el punt de tall de la semirecta que uneix $f(x)$ amb x .



Llavors r defineix una retracció de B^n en S^{n-1} : es compleix que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$.

Ara suposem que existís $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ contínua tal que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$. Aleshores considerem l'aplicació $f: B^n \rightarrow B^n$ definida per $f(x) = -r(x)$. D'aquesta manera hem construït una aplicació contínua f sense punts fixos. $\square$

Finalment, la segona condició de la proposició 5 és també equivalent al fet que l'esfera S^{n-1} no és contràtil. Una homotopia entre l'aplicació constant i la identitat dóna lloc a una retracció $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$, observant que B^n és homeomorf a un con amb base S^{n-1} . I al revés, una retracció r donaria lloc a una homotopia de la identitat a l'aplicació constant.

Per simplicitat hem exposat el teorema del punt fix de Brouwer per a n -símplexs o boles, però és vàlid en general per a subespais compactes i convexos $K \subset \mathbb{R}^n$. Va ser un any més tard de la publicació del lema de Sperner, el 1929, que Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz [6] el van utilitzar per demostrar un teorema sobre recobriments de símplexs del qual es dedueix el teorema del punt fix de Brouwer.

Entre les moltes generalitzacions d'aquest teorema, cal destacar el teorema de Schauder [12]: sigui K un subespai compacte i convex d'un espai vectorial localment convex, aleshores tota aplicació contínua de K en si mateix té un punt fix. Una altra generalització és el teorema de Kakutani [5] per a funcions que prenen valors en conjunts i que és una peça important en el conegut teorema de Nash sobre l'existència d'equilibris de Nash en teoria de jocs [11]. Què té a veure el teorema del punt fix de Brouwer amb el joc de l'Hex? Una lectura molt recomanable són les notes [10].

3.1 Sabíeu que...

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) va ser un matemàtic i filòsof holandès. A part del teorema del punt fix, va provar altres resultats molt importants en el camp de la topologia algebraica, com el teorema de la bola peluda (1912). La seva demostració del teorema del punt fix usa tècniques de la topologia algebraica que asseguruen l'existència del punt fix de manera no constructiva. Curiosament, al cap d'uns anys va fundar el corrent de l'intuïcionisme, que no acceptava les demostracions no constructives.

4 Una mica de matemàtica aplicada

En un primer contacte, el lema de Sperner sembla un fet senzill sobre certs tipus de grafs amb un etiquetatge especial als vèrtexs, però aquesta senzillesa contrasta amb diverses de les seves aplicacions sorprenents. En aquesta secció només en descriurem un parell vinculades al problema conegut com el de la repartició justa. Una referència per a aquesta secció és l'article de F. E. Su [15].

Els problemes de repartició justa són aquells que estan relacionats amb la manera de dividir un objecte o un recurs en parts diferents d'acord amb una certa noció de justícia i igualtat, és a dir, que tothom està content amb la partició final i no enveja el que han obtingut els altres participants. En aquests problemes ens interessa saber primer si una solució existeix i, en aquest cas, com

trobar-la. Una versió n'és el problema del pastís que va plantejar el matemàtic polonès Hugo Steinhaus el 1948. Però ha estat més recentment que idees de la combinatòria topològica han proporcionat mètodes nous i constructius per obtenir solucions a aquest tipus de problemes.

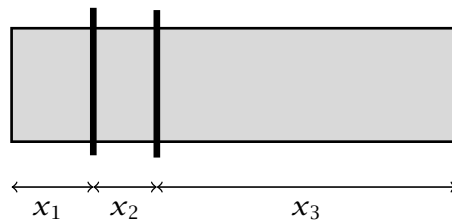
4.1 El problema del repartiment del pastís

Suposem que tenim un pastís rectangular que cal tallar i repartir entre un grup de n convidats a una festa. Per repartir-lo ens caldrà fer $n - 1$ talls amb el ganivet paral·lels al costat més petit del pastís. Però cada convidat pot tenir una opinió diferent sobre quin dels talls prefereix, per exemple, en funció de la gana que tingui o dels ingredients o la decoració del pastís. Algun convidat pot tenir poca gana però preferir el tall que té més xocolata, o bé el que té la cirereta... L'objectiu és tallar el pastís de manera que tots els convidats estiguin contents amb el tall que els ha tocat i no prefereixin el de cap altre convidat. Formalitzem el problema.

Suposem que el pastís es presenta ja repartit als convidats. Direm que una persona prefereix un dels talls fixats si creu que cap altre tall del pastís és millor que l'escollit. Aquesta elecció és independent del que pensin els altres convidats, i suposem que sempre escull algun tall. A més, en aquest procés demanarem que se satisfacin les dues condicions següents:

1. Els convidats tenen gana: sempre triaran un tall abans que quedar-se sense res, és a dir, d'alguna manera tots els talls són acceptables per als convidats que tenen gana.
2. Si una persona prefereix un tall en una successió convergent de possibles reparticions, aleshores prefereix el mateix tall en la repartició límit. Diem que el conjunt de preferències és tancat.

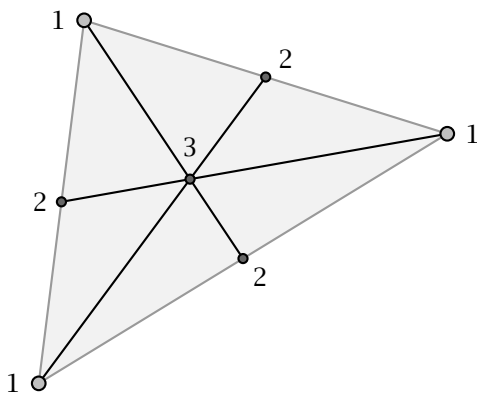
Suposarem que el pastís rectangular té longitud 1. Aleshores, podem representar una repartició possible com una n -tupla de números reals positius $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ tals que $\sum x_i = 1$, on cada x_i és la longitud del tall que es troba a la i -èsima posició.



Per tant, l'espai de totes les presentacions possibles del pastís tallat forma un $(n - 1)$ -simplex a $\mathbb{R}^n$ amb vèrtexs $p_i = (0, \dots, 1^i, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

La idea de l'estratègia que presentarem és original de F. W. Simmons (vegeu [15]). Treballarem amb dos etiquetatges del $(n - 1)$ -simplex i les seves subdivisions: un representarà els convidats, i l'altre, les eleccions que van fent.

Sigui S^j la triangulació del n -simplex obtinguda iterant j -vegades la subdivisió baricèntrica. Escriurem com a $\{C_1, \dots, C_n\}$ la llista de convidats a la festa. Per a cada $j \geq 0$, assignarem a la triangulació corresponent un etiquetatge L_C amb valors a $\{C_1, \dots, C_n\}$ de manera que tots els triangles siguin distingits. És possible? Vegem com aconseguir-ho. Per a $j = 0$, només cal assignar convidats diferents als vèrtexs, $L_C(p_i) = i$. En el pas següent utilitzem el procediment que expliquem tot seguit, el qual s'anirà iterant successivament. Tots els vèrtexs que provenen del pas anterior s'assignen al mateix convidat C_1 , els vèrtexs que són baricentres de subsímplexs 1-dimensionals s'assignen a C_2 , els vèrtexs que són baricentres de subsímplexs 2-dimensionals s'assignen a C_3 , i així successivament fins a assignar C_n als baricentres de subsímplexs $(n-1)$ -dimensionals de la triangulació. Ara, cada cop que iterem la subdivisió baricèntrica per obtenir una triangulació, recolloquem les etiquetes segons el procediment anterior. Informalment direm que si v és un vèrtex de S^j , $L_C(v)$ és el propietari d'aquest vèrtex. Observeu que aquest etiquetatge no és propi, però tots els seus símplex són distingits.



Donada, doncs, una triangulació S^j amb etiquetatge L_C , construirem un nou etiquetatge L_P de la manera següent. Sigui $v = (x_1, \dots, x_n)$ un vèrtex de S^j que descriu una repartició del pastís en talls, aleshores preguntarem al propietari $L_C(v)$ del vèrtex v quin dels talls prefereix, i posarem $L_P(v) = i$ si ha escollit el tall i -èsim. Es llegeix dient que, amb la configuració v , el convidat $L_C(v)$ prefereix el tall $L_P(v)$.

Veurem ara que aquest etiquetatge L_P sí que és propi. Els vèrtexs principals L_P són de la forma $p_i = (0, \dots, 1^i, \dots, 0)$ i, per tant, com que els convidats tenen gana, sempre tindrem $L_P(p_i) = i$, ja que escolliran l'únic tall no buit. Ara bé, els $(n-2)$ -subsímplexs es caracteritzen perquè hi ha una coordenada fixada que sempre val zero (aquella que correspon al vèrtex que no apareix a la llista de vèrtexs $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_{n-1}}\}$ que la generen). I, per tant, cap convidat no escollirà aquell tall; així, si v és un vèrtex en aquell subsímplex es complirà que $L_P(v) \in \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$.

Finalment, el lema de Sperner afirma que la triangulació S^j amb etiquetatge L_P té un nombre senar de $(n-1)$ -símplexs distingits. Què ens diu? Doncs que hi ha un $(n-1)$ -simplex de la triangulació de manera que els seus vèrtexs

determinen talls de pastís propers amb la propietat que convidats diferents tenen preferències diferents. La condició de continuïtat ens diu que si apliquem un procés de pas al límit com hem fet en la demostració del teorema del punt fix de Brouwer, obtindrem que les successions d'aquests vèrtexs tenen una parcial que convergeix a un punt del símplex amb la propietat que representa una partició del pastís en la qual convidats diferents tenen preferències diferents.

Així doncs, hem demostrat el teorema següent.

TEOREMA 6. *Amb les suposicions anteriors, existeix una manera de repartir el pastís de manera que cada persona prefereix un tall diferent.*

Recordeu que el lema de Sperner té una demostració constructiva que descriu un algorisme per trobar simplexs distingits. A la pràctica, com trobem aquesta repartició justa del pastís? El primer és acordar un nivell de tolerància $\epsilon > 0$ entre els convidats, és a dir, que si un convidat prefereix un tall de pastís x_i en un punt del símplex $x = (x_1, \dots, x_n)$, aleshores també prefereix el tall i -èsim en punts a una distància menor que ϵ . Per tant, considerem directament una triangulació S^j on tots els $(n - 1)$ -simplexs tinguin un diàmetre menor que ϵ , trobem amb un algorisme un $(n - 1)$ -símplex distingit i prenem el baricentre d'aquest $(n - 1)$ -símplex.

4.2 El problema del lloguer en un pis d'estudiants

Aquest problema té el mateix esperit que el repartiment del pastís però amb matisos diferents. Un grup d'estudiants vol llogar un pis per compartir. Han trobat un pis que els agrada a tots. D'entrada el lloguer es divideix en parts iguals entre ells, però ara cal repartir-se les habitacions i no totes són iguals. Unes són més grans, unes altres tenen més llum, n'hi ha que donen al carrer i són més sorolloses... És just que tots paguin el mateix independentment de l'habitació que els toqui? Potser algú estaria disposat a pagar més a condició de poder escollir una certa habitació, o al revés, algú preferiria pagar menys a canvi de quedar-se alguna habitació que els seus companys no volen. El nostre objectiu ara és trobar una repartició justa d'habitacions i lloguer de manera que tots ells estiguin satisfets amb l'habitació que tenen i el preu que en paguen.

De manera semblant a l'exemple anterior, en aquest procés suposarem que es compleixen les tres condicions següents:

1. En qualsevol repartició del lloguer segons les habitacions, tothom troba una opció acceptable.
2. En qualsevol repartició del lloguer segons les habitacions, un estudiant sempre preferirà una habitació de franc a una que no ho sigui.
3. Si un estudiant prefereix una habitació/preu en una successió convergent de possibles reparticions, aleshores prefereix la mateixa opció en la repartició límit. Diem, com abans, que el conjunt de preferències és tancat.

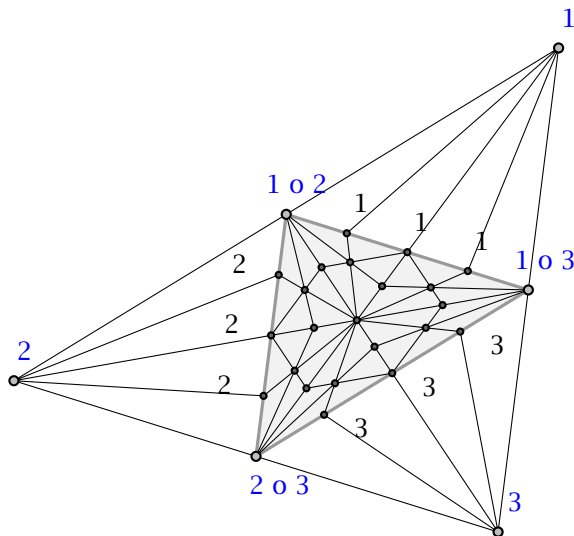
TEOREMA 7. *En les condicions anteriors, existeix una repartició del lloguer en habitacions de manera que estudiants diferents prefereixen habitacions diferents.*

Vegem com podem demostrar-ho. Suposem que el lloguer del pis val 1. Enumerem les habitacions d'1 a n . Aleshores una tupla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, amb $\sum x_i = 1$, representa una repartició del lloguer en habitacions de manera que x_i és el que cal pagar per obtenir l'habitació i . Així, el $(n - 1)$ -simplex estàndard representa l'espai de totes les opcions possibles d'assignar preus a les habitacions.

L'estratègia segueix la línia de l'exemple anterior. Considerem triangulacions obtingudes amb la subdivisió baricèntrica amb etiquetatge L_C de manera que tots els triangles són distingits. Les etiquetes són els estudiants: $L_C(v) = i$ voldrà dir que en el vèrtex v és l'estudiant i qui tria habitació, i amb aquesta elecció obtenim un nou etiquetatge $L_E(v) = j$. Es llegeix dient que en la repartició del lloguer que defineix v , l'estudiant $L_C(v)$ escull l'habitació $L_E(v)$.

Vegem quines condicions compleix aquest etiquetatge. En els vèrtexs principals $p_i = (0, \dots, 1^i, \dots, 0)$ hi ha un munt d'habitacions gratis per escollir; així, només podem afirmar $L_E(p_i) \neq i$. A més, en els $(n - 2)$ -subsímplexs que es caracteritzen perquè hi ha una coordenada fixada k que sempre val zero, les condicions de l'elecció fan que potser $L_E(v) = k$. L'etiquetatge L_E no és propi.

Aquesta situació s'arregla de la manera següent. Considerem un $(n - 1)$ -simplex T a $\mathbb{R}^n$ que contingui el $(n - 1)$ -simplex estàndard que estem considerant. Els vèrtexs principals del $(n - 1)$ -simplex estàndard són baricentres de T . Aleshores, si considerem les triangulacions anteriors, S^j , estan contingudes en les triangulacions T^j obtingudes iterant el procés de subdivisió baricèntrica només a S . Estenem l'etiquetatge posant $L_E(v) = i$ si la coordenada i -èsima de v és negativa. Es pot interpretar que afegim la possibilitat que un llogater rebi diners dels seus companys per quedar-se l'habitació i .



Ara sí que tenim que L_E és un etiquetatge propi de T^j i el lema de Sperner ens diu que hi ha un $(n - 1)$ -simplex distingit. A més, aquest s'ha de trobar a S^j per la manera com hem estès L_E als vèrtexs que no hi pertanyen. És a dir, tenim un $(n - 1)$ -simplex de manera que en les opcions que ofereixen els seus vèrtexs, diferents estudiants escullen habitacions diferents. Ara acabem l'argument de la mateixa manera que en l'exemple anterior: o bé fent un pas al límit o bé introduint el concepte de tolerància en l'elecció.

Fixeu-vos que, amb l'estratègia per convertir L_E en un etiquetatge propi, en realitat hem demostrat un lema de Sperner dual per a un altre tipus d'etiquetats de vèrtexs en triangulacions d'un simplex.

5 Una història semblant: el lema de Tucker i el teorema de Borsuk-Ulam

Un altre resultat clàssic que apareix en els llibres d'introducció a la topologia algebraica és el teorema de Borsuk-Ulam (1933). Agafem el llibre de Lefschetz [7] que ens ha fet descobrir el lema de Sperner i mirem què diu d'aquest resultat. Anem a la pàgina 134, on comença una secció titulada «Some theorems on the sphere». I diu:

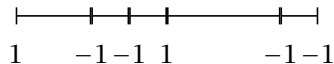
The material in the present section has been communicated to the author by A. W. Tucker. A certain algebraic lemma resembling Sperner's lemma is first established and various known theorems are then deduced from the lemma.

Un d'aquests teoremes que menciona el trobem a la pàgina 138:

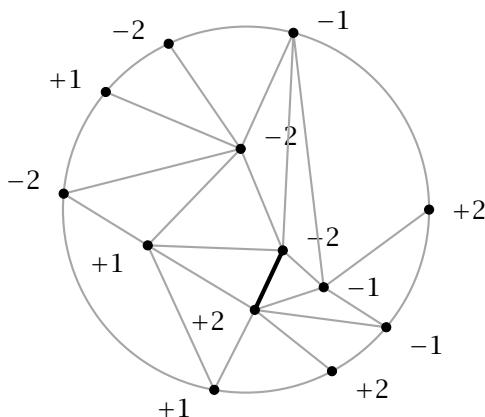
(21.4) Theorem. *There is no (continuous) mapping of S^n into S^{n-1} which maps antipodal points of S^n into antipodal points of S^{n-1} without exception.*

5.1 El lema de Tucker

El lema de Tucker és una altra generalització del que passa en el lema de Sperner per al cas $n = 1$: si etiquetem els vèrtexs d'una subdivisió de l'interval amb $\{+1, -1\}$ de manera que els extrems tenen signe contrari, aleshores hi ha un nombre senar de canvis de signe.



En el cas de dimensió 2, podem estendre aquest resultat estudiant triangulacions de la bola B^2 etiquetades amb elements del conjunt $\{+1, -1, +2, -2\}$ i tals que són antipodals a la vora, és a dir, si v és un vèrtex amb etiqueta i , aleshores $-v$ també és un vèrtex amb etiqueta $-i$. D'aquesta manera, el lema de Tucker ens dirà que hi ha almenys una aresta tal que les etiquetes dels seus extrems sumen zero. Per què?

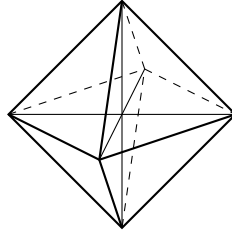


Suposem que no hi ha cap aresta tal que els seus vèrtexs sumin zero. Com que a la vora les etiquetes són antipodals, a la força hi ha d'haver una aresta de tipus $(1, -2)$. Suposem que aquestes arestes són parets amb porta i les altres no es poden travessar. Comencem a caminar entrant al disc per una d'aquestes portes de la vora. Com que no hi ha arestes de tipus $(1, -1)$ i $(2, -2)$, aleshores el tercer vèrtex del triangle serà 1 o -2 ; per tant, tenim una altra porta per continuar el camí. Repetint aquest argument anem construint un recorregut que només pot acabar sortint per una altra aresta de tipus $(1, -2)$ a la vora diferent, ja que només hi ha un nombre finit de triangles. Per tant, a la vora del disc hi ha d'haver un nombre parell d'arestes de tipus $(1, -2)$.

Fixem un vèrtex de la vora v i el seu antipodal $-v$. Aquesta elecció divideix el cercle en dos semicercles, P i $-P$. Aleshores el nombre d'arestes tipus $(1, -2)$ a la vora també és igual al nombre d'arestes $(1, -2)$ més les del tipus $(-1, 2)$ al semicercle P . Recordeu que aquesta suma és parell. Però observeu que només es poden produir canvis de signe precisament en aquestes arestes, ja que hem suposat que no n'hi ha de tipus $(-1, 1)$ o $(2, -2)$. Però per al cas $n = 1$, sabem que a P hi ha un nombre senar de canvis de signe!

Tucker va fer una demostració anàloga a la que acabem de veure per al quadrat. El cas general va aparèixer per primera vegada en el llibre [7] de Lefschetz. A la referència [3] s'hi pot trobar una prova per a dimensió 3 que fa servir arguments combinatoris i una indicació de com s'estendria a dimensions superiors. Aquestes demostracions no són constructives sinó que fan servir arguments de comptar. Una demostració constructiva es troba a [4]. Aquesta és la que explicarem. Es restringeix a un tipus especial de triangulacions que són suficients per al nostre objectiu, però el lema de Tucker és cert sense aquesta restricció.

A partir d'ara considerarem la bola $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + \dots + |x_n| \leq 1\}$. Les triangulacions T de B^n que considerarem seran totes un refinament de la triangulació induïda pels hiperplans generats pels eixos de coordenades. En direm *triangulacions especials*.



DEFINICIÓ 8. Una triangulació T de B^n és *antipodalment simètrica* si per a tot símplex $\sigma \subset \partial B^n = S^{n-1}$ tenim que $-\sigma$ és un símplex de la triangulació. Sigui $L: V(T) \rightarrow \{+1, -1, \dots, +n, -n\}$ un etiquetatge dels vèrtexs de T , direm que L és *antipodal a la frontera* si per a tot vèrtex $v \in S^{n-1}$ es compleix $L(-v) = -L(v)$.

Donat σ un símplex de la triangulació, denotarem per $L(\sigma)$ el conjunt $\{L(v) \mid v \in V(\sigma)\}$ de les etiquetes dels seus vèrtexs. Direm que un 1-símplex amb vèrtexs $\{v, w\}$ és *complementari* si $L(v) + L(w) = 0$ (és a dir, $L(\sigma) = \{+i, -i\}$ per a $i = 1, \dots, n$).

LEMA DE TUCKER. Sigui T una triangulació antipodalment simètrica de B^n amb $L: V(T) \rightarrow \{+1, -1, \dots, +n, -n\}$ antipodal a la frontera. Aleshores existeix una aresta o 1-símplex complementari.

La demostració es basa en una idea semblant a la descrita per al lema de Sperner. Farem un recorregut a través de la triangulació però només trepitjant símplexs especials, que ara descriurem.

El fet que només considerem triangulacions especials T dóna sentit a considerar l'ortant on es troba el símplex. Donat σ un símplex de T , podem prendre un punt interior $x \in \sigma$ i considerar el conjunt

$$\text{Sig}(\sigma) = \{+i \mid x_i > 0, i = 1, \dots, n\} \cup \{-i \mid x_i < 0, i = 1, \dots, n\}.$$

DEFINICIÓ 9. Un símplex $\sigma \in T$ és *especial* si $\text{Sig}(\sigma) \subset L(\sigma)$. Direm que dos símplexs σ i τ especials són *adjacents* si es compleix una de les dues condicions:

1. $\sigma \subset S^{n-1}$ i $\sigma = -\tau$.
2. $\sigma \subset \tau$ i $\text{Sig}(\tau) \subset L(\sigma)$.

Un símplex és especial si les etiquetes dels seus vèrtexs indiquen l'ortant on es troba. Dos símplexs especials no antipodals són adjacents si un està contingut a l'altre i les etiquetes del petit codifiquen l'ortant on es troba el símplex gran.

Passarem d'un símplex especial a un altre si són adjacents. Si dos símplexs especials σ_1 i σ_2 no són antipodals, també passarem d'un a l'altre (en dos passos) quan els dos símplexs siguin adjacents a la seva intersecció i aquesta intersecció sigui especial. Tot plegat es compleix si i només si $\text{Sig}(\sigma_i) \subseteq L(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ per a $i = 1, 2$, és a dir, si la intersecció ja conté les etiquetes necessàries perquè tant aquesta intersecció com els dos símplexs σ_1 i σ_2 siguin especials i també per ser adjacent a σ_1 i σ_2 .

Observeu que l'origen de coordenades és sempre especial, ja que $\text{Sig}(0) = \emptyset$. Per tant, si $L(0) = i$, on $i \in \{+1, -1, \dots, +n, -n\}$, un 1-símplex que contingui 0 serà especial i adjacent a 0 si l'altre vèrtex es troba en el semieix determinat per i . I aquesta elecció serà única, ja que T és una triangulació especial i el semieix escollit depèn de manera única de $L(0)$.

Si $\sigma \in T$ és especial i $|\text{Sig}(\sigma)| = k$, aleshores el seu interior està contingut a l'embolcall convex generat pels semieixos de coordenades corresponents i , per tant, de dimensió menor o igual a k . D'altra banda, com que ha de contenir les etiquetes que indiquen l'ortant on es troba, ha de tenir com a mínim k vèrtexs; per tant, sabem que és de dimensió k o $k - 1$.

PROVA DEL LEMA DE TUCKER. Suposem que no tenim arestes complementàries en la nostra triangulació. Ens situem a l'origen i descriurem un recorregut a través de símplexs especials adjacents. L'origen del nostre recorregut és l'origen de coordenades. L'origen és un vèrtex especial i la seva etiqueta $L(0)$ determina un únic semieix que conté una aresta especial adjacent a ell.

Suposem que ens trobem en un símplex especial σ , amb $|\text{Sig}(\sigma)| = k$ i dimensió $k - 1$. Si $\sigma \subset S^{n-1}$, aleshores σ és la cara d'exactament un símplex de dimensió k especial i el seu antipodal $-\sigma \in T$ també és especial. Si σ no es troba a la frontera, dins del seu ortant és la cara de dos k -símplexs especials (ja que σ conté les etiquetes necessàries per determinar els símplexs d'aquell ortant).

Si la dimensió de σ és k , aleshores té $k + 1$ vèrtexs, k dels quals tenen les etiquetes determinades per l'ortant on es troba σ . Això vol dir que una de les cares de dimensió $k - 1$ és especial. El vèrtex que no pertany a aquesta cara, $v \in \sigma$, pot prendre altres valors. Si $L(v)$ és repetit, és a dir, $\text{Sig}(\sigma) = L(\sigma)$, aleshores això determina una altra cara diferent especial. I com que té dues etiquetes repetides, no pot ser adjacent a un símplex especial de dimensió $k + 1$. Si no és repetida, aleshores, $L(\sigma) = \text{Sig}(\sigma) \cup \{i\}$. Hem suposat que no hi ha arestes complementàries, per tant, $|i| \neq |j|$ per a tot $j \in \text{Sig}(\sigma)$. Aleshores, les etiquetes de σ són suficients per fer σ adjacent a exactament un símplex de dimensió $k + 1$ en l'ortant corresponent.

En conclusió, si només podem trepitjar símplexs especials en el nostre recorregut començant a l'origen, obtenim que l'origen és de grau 1 amb una sola opció de sortida i tots els altres símplexs especials que anem trepitjant són de grau 2 amb una sola possible sortida diferent de l'entrada. Com que hi ha un nombre finit de símplexs, arribem a contradicció i a la força han d'haver-hi arestes complementàries. $\square$

Sabíeu que... Albert W. Tucker (1905–1995) va ser un matemàtic canadenc. El seu director de tesi va ser Lefschetz. Fou el director de tesi de dos premis Nobel: John Nash (Premi Nobel d'Economia 1994) i Lloyd Shapley (Premi Nobel d'Economia 2012). Va guanyar el Premi John von Neumann, juntament amb David Gale i Harold Kuhn, l'any 1980. Es deu a ell la formalització del dilema del presoner.

5.2 El teorema de Borsuk-Ulam

Del teorema de Borsuk-Ulam i les seves aplicacions, se'n podria escriure un llibre sencer i, de fet, algú ja ho ha fet. Una referència molt recomanable és el llibre de Jiří Matoušek [9], on descriu aplicacions d'aquest resultat a altres àrees de les matemàtiques.

El teorema de Borsuk-Ulam té diverses formulacions equivalents. A l'article original de K. Borsuk [1] s'hi diu que el seu objectiu és demostrar els tres enunciats següents.

TEOREMA 10. *Tota aplicació contínua i antipodal $f: S^n \rightarrow S^n$ (i. e. $f(-x) = -f(x)$) és essencial, és a dir, no és nulhomotopa.*

TEOREMA 11 (TEOREMA DE BORSUK-ULAM). *Si $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua. Aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Aquesta versió rep el nom de *teorema de Borsuk-Ulam*, ja que el mateix Borsuk posa una nota a peu de pàgina en què indica que aquest enunciat correspon a una conjectura proposada per Ulam.

TEOREMA 12 (TEOREMA DE LYUSTERNIK-SCHNIREL'MAN). *Considerem els $n + 1$ conjunts tancats $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ que formen un recobriment de S^n , aleshores n'hi ha almenys un que conté una parella de punts antipodals.*

Aquesta versió va ser provada primer per Lyusternik-Schnirel'man [8] l'any 1947 en una versió combinatòria: l'esfera S^n no es pot descompondre en $n + 1$ subconjunts (tancats) de diàmetre menor que 2.

Els teoremes 10, 11 i 12 són enunciats equivalents. Altres versions també equivalents són:

1. Si $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació contínua tal que $f(-x) = -f(x)$, aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.
2. No hi ha cap aplicació contínua antipodal $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$.
3. No hi cap aplicació contínua $f: B^n \rightarrow S^{n-1}$ que sigui antipodal restringida a $S^n \subset B^n$.

PROVA DEL TEOREMA DE BORSUK-ULAM. Donada $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, considerem una nova funció $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida per $g(x) = f(x, 1 - \|x\|) - f(-x, \|x\| - 1)$. De la definició es veu que $g(-x) = -g(x)$ si $x \in S^{n-1}$.

La idea és construir una triangulació T de B^n amb un etiquetatge L que compleixi les condicions del lema de Tucker.

Si T una triangulació especial de B^n . Donat un vèrtex $v \in T$ definim $L(v) = i$ (resp. $L(v) = -i$) si i és el primer índex tal que $|g(v)_i| = \max\{|g(v)_j|, j = 1, \dots, n\}$ i $g(v)_i > 0$ (resp. $g(v)_i < 0$). Com que g és antipodal a la vora, es compleixen les condicions del lema de Tucker per $L: V(T) \rightarrow \{+1, -1, \dots, +n, -n\}$. Per tant, hi ha una aresta complementària.

Prenem una successió de triangulacions $\{T_1, T_2, \dots\}$ de B^n tals que el màxim dels diàmetres dels seus símplexs tendeix a zero. Per exemple, iterant el procés de subdivisió baricèntrica. Aleshores tenim una successió d'arestes complementàries. Per a algun $i \in \{1, \dots, n\}$, obtindrem una successió d'arestes complementàries σ_n de tipus $L(\sigma) = \{i, -i\}$, amb vèrtexs $\{v_n, w_n\}$, de manera

que la distància entre els dos vèrtexs tendeix a zero. Com que B^n és compacte, sabem que hi ha successions parcials convergents de $\{v_n\}$ i $\{w_n\}$ i que tenen el mateix límit $x^* \in B^n$. D'una banda, $g(x^*)_i \geq 0$ i $|g(v)_i| \geq |g(v)_j|$ per a $j \neq i$. Però, d'altra banda, $g(x^*)_i \leq 0$ i $|g(v)_i| \geq |g(v)_j|$ per a $j \neq i$. Així doncs, tenim $x^* \in B^n$ tal que $g(x^*) = 0$. Aleshores, $f(x^*, 1 - \|x^*\|) = f(-x^*, \|x^*\| - 1)$. $\square$

A més, el teorema de Borsuk-Ulam implica el teorema del punt fix de Brouwer.

PROPOSICIÓ 13. *El teorema de Borsuk-Ulam implica el teorema del punt fix de Brouwer.*

PROVA. Sigui $f: B^n \rightarrow B^n$ una aplicació contínua sense punts fixos, aleshores la proposició 5 ens diu que podem construir una aplicació $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ tal que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$. La projecció en les n primeres coordenades $p: S^n \rightarrow B^n$ és un homeomorfisme quan la restringim a cadascun dels hemisferis $H^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0\}$ i $H^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0\}$. Aleshores definim $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$ posant $g(x) = r(p(x))$, si $x \in H^+$, i $g(x) = -r(p(-x))$, si $x \in H^-$. L'aplicació g és contínua, ja que ho és als tancats H^+ i H^- i les definicions de g coincideixen a la intersecció S^{n-1} , d'aquests dos tancats. Per construcció, satisfà $g(-x) = -g(x)$. $\square$

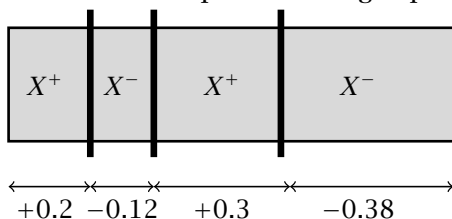
5.3 Una miqueta més de matemàtica aplicada

Ja hem vist com el lema de Sperner en combinatòria topològica permetia trobar solucions de problemes de repartiments justos. Ara li toca el torn al lema de Tucker. El teorema de Borsuk-Ulam ja s'associa de manera natural a problemes de repartiment: per exemple, el teorema de l'entrepà de pernil. Moltes d'aquestes aplicacions es troben a [9]. Les que descriurem ara breument són particions de consens i es poden trobar a [13].

5.3.1 Més problemes de pastissos Suposem que tenim un pastís X que volem repartir en dos, de manera que un equip de n participants consideri que la partició és equitativa. Pensem per exemple que aquest pastís no és homogeni i ingredients diferents es troben en proporcions diferents al llarg del pastís.

Cada participant p_i té una funció de mesura μ_i contínua sobre els subconjunts de X . L'objectiu és trobar la manera de repartir X en dos conjunts disjunts, $X = X^+ \cup X^-$, de manera que qualsevol participant els valori igual. És a dir, $\mu_i(X^+) = \mu_i(X^-)$ per a tot $i = 1, \dots, n$.

Sigui $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ homeomorfa a $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x_1| + \dots + |x_{n+1}| = 1\}$. Cada $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ determina una partició del pastís on $|x_i|$ és la llargada del tall i -èsim, i el signe determina si l'assignem a X^+ o X^- . Aleshores X^+ (resp. X^-) és la unió de totes les peces amb signe positiu (resp. negatiu).



Considerem la funció $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, amb $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\mu_1(X^+), \dots, \mu_n(X^+))$, que assigna a cada partició els diferents valors que els participants atorguem a X^+ obtingut. Aquesta funció és contínua, ja que ho són les diferents mesures de cada participant. Aleshores, el teorema 11 ens diu que existeix $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Però observem que punts antipodals corresponen a la mateixa repartició intercanviant el paper de X^+ i X^- . Per tant, en aquest punt tots els participants valoren igual els dos conjunts X^+ i X^- .

Aquest argument és existencial. El lema de Tucker ens proporciona un algorisme per aproximar la solució. Fixem un nivell de tolerància $\epsilon > 0$, de manera que si la diferència de valoració entre X^+ i X^- és menor que ϵ , ja els considerarem valorats igual. Tot seguit, considerem una triangulació T de l'esfera S^n prou fina, de manera que si dos vèrtexs estan units per una aresta, aleshores les valoracions de X^+ en aquests vèrtexs difereixen en menys de ϵ per a tots els participants.

A cada vèrtex $v \in T$ li assignarem una etiqueta $L(v)$, que és un element del conjunt $\{+1, -1, \dots, +n, -n\}$. El número indica quin participant creu que la diferència entre X^+ i X^- és més gran (i, en cas d'haver-n'hi més d'un, escolliríem el d'índex menor), i el signe indica quina de les dues porcions valora més. En cas que les prefereixi de la mateixa manera, establim que triem la que comença a l'esquerra del pastís. Vegem ara que compleix les condicions del lema de Tucker. Noteu que $-v$ intercanvia els papers de X^+ i X^- , per tant, $L(-v) = -L(v)$. Aleshores, el lema de Tucker ens diu que hi ha una aresta amb vèrtexs v_1 i v_2 tals que $L(v_1) = -L(v_2)$. Però tots els participants estaran d'acord que aquesta és una equidistribució, ja que la diferència de valoracions és menor que ϵ per a tots ells.

5.3.2 El problema de fer equips Deixem els pastissos i expliquem ara el problema de fer dos equips. Suposem que tenim $2n$ exploradors agrupats en parelles segons n especialitats: 2 botànics, 2 matemàtics... Tenen l'encàrrec d'explorar un territori i, per a això, cal dividir-los en dos equips i cal dividir el territori en dues zones, una per cada equip. L'objectiu és fer-ho de manera que cada especialitat estigui representada a cada equip i que cada explorador estigui content amb el territori que li ha tocat.

Ara el territori és l'objecte A que cal dividir. Cada parella d'especialistes i valora el territori amb mesures α_i i α'_i , respectivament, de manera que la parella fa una valoració total que és la suma de totes dues $\mu_i = \alpha_i + \alpha'_i$. Ara ja estem en les condicions anteriors i sabem que hi ha una repartició del territori en A^+ i A^- tal que $\mu_i(A^+) = \mu'_i(A^+)$ per a tot $i = 1, \dots, n$. Com ho fem per assignar cada especialista a un equip? Si tots dos valoren igual A^+ i A^- , fem una assignació a l'atzar. Si un d'ells prefereix A^+ , aleshores l'altre prefereix A^- , ja que $\mu_i(A^+) = \mu'_i(A^+)$, així que assignem a cada especialista la porció de territori que prefereix.

Referències

- [1] BORSUK, K. «Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre». *Fund. Math.*, 20 (1933), 177–190.
- [2] BROUWER, L. E. J. «Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten». *Math. Ann.*, 71 (1912), 97–115.
- [3] COHEN, D. I. A. «On the combinatorial antipodal-point lemmas». *J. Combin. Theory Ser. B*, 27 (1) (1979), 87–91.
- [4] FREUND, R. M.; TODD, M. J. «A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma». *J. Combin. Theory Ser. A*, 30 (3) (1981), 321–325.
- [5] KAKUTANI, S. «A generalization of Brouwer's fixed point theorem». *Duke Math. J.*, 8 (1941), 457–459.
- [6] KNASTER, B.; KURATOWSKI, C.; MAZURKIEWICZ, S. «Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe». *Fund. Math.*, 14 (1) (1929), 132–137.
- [7] LEFSCHETZ, S. *Introduction to Topology*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1949. (Princeton Mathematical Series; 11)
- [8] LYUSTERNIK, L.; ŠNIREL'MAN, L. «Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces». *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 2 (1(17)) (1947), 166–217. [En rus]
- [9] MATOUŠEK, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Berlín: Springer-Verlag, 2003. (Universitext) [Escrit en col·laboració amb Anders Björner i Günter M. Ziegler]
- [10] MATOUŠEK, J.; ZIEGLER, G. M.; BJÖRNER, A. «Around Brouwer's fixed point theorem (Lecture Notes)». Preprint (2014). Disponible a [arXiv:1409.7890](https://arxiv.org/abs/1409.7890).
- [11] NASH, J. F., JR. «Equilibrium points in n -person games». *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 36 (1950), 48–49.
- [12] SCHAUDER, J. «Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen». *Studia Math.*, 2 (1930), 171–180.
- [13] SIMMONS, F. W.; SU, F. E. «Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker». *Math. Social Sci.*, 45 (1) (2003), 15–25.
- [14] SPERNER, E. «Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes». *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 (1) (1928), 265–272.
- [15] SU, F. E. «Rental harmony: Sperner's lemma in fair division». *Amer. Math. Monthly*, 106 (10) (1999), 930–942.

Ideals de corbes mòbils i la seva interacció amb el disseny assistit per ordinador

CARLOS D'ANDREA

Resum: Presentem un cas d'interacció fructífera entre l'àlgebra commutativa i el disseny assistit per ordinador. Els problemes en aquesta àrea aplicada i cada vegada més important de la informàtica s'han traslladat a l'estudi d'estructures algebraïques abstractes, i han enriquit la matemàtica amb múltiples resultats teòrics i problemes oberts que expliquem en aquest text.

Paraules clau: parametritzacions racionals, corbes planes, àlgebres de Rees, μ -bases, generadors minimal.

Classificació MSC2010: primària: 14H50; secundària: 13A30, 68W30.

Introducció

En el disseny geomètric assistit per ordinador, les corbes i les superfícies del pla i de l'espai euclidià són actors essencials, i és per això que la seva representació algebraica i geomètrica és de molta importància.

Al lector li deuen ser familiars les representacions «paramètriques» i «implícites» d'una corba o superfície que va aprendre als cursos de càlcul i/o geometria elemental. Les primeres són d'interès per produir punts en una determinada figura, mentre que les formes implícites són útils per decidir amb facilitat si un punt determinat pertany al conjunt o no. Per exemple, és un fet clàssic ja conegut pels antics grecs que la circumferència amb centre a l'origen de $\mathbb{R}^2$ i radi unitari (figura 1) pot parametritzar-se així:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

(en realitat, la imatge d'aquesta aplicació cobreix tota la circumferència excepte el punt $(-1, 0)$), mentre que la seva representació implícita al pla de coordenades (x, y) és l'equació coneguda

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.\tag{2}$$

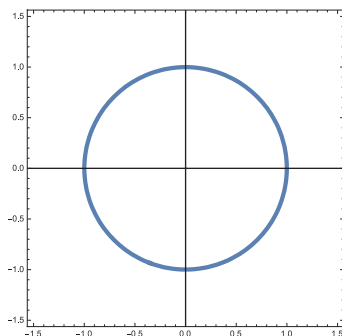


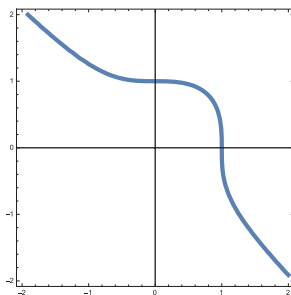
FIGURA 1: La circumferència unitària.

Ambdues representacions són importants, ja que —per exemple— per calcular interseccions entre corbes és convenient tenir-ne una en forma paramètrica i l'altra de manera implícita.

Al món computacional, les corbes s'han de definir de manera «finita» i precisa, la qual cosa ens porta directament al cor de l'àlgebra, ja que precisament els polinomis i els seus quocients (les funcions racionals) són expressables amb poca informació (per exemple, els coeficients dels polinomis implicats) i precisió suficient. En realitat, degut a la capacitat de precisió visual d'ordinadors d'avui en dia, n'hi ha prou amb treballar amb funcions polinòmiques (o quocients d'aquestes) «a trossos», de grau molt baix (sovint lineals). En aquest escrit ens limitarem a treballar amb funcions racionals, això és, que es puguin representar com a polinomis o quocients de polinomis en tot el pla.

A l'avantatge de «quedar-nos» al món polinòmic, que fa que amb poca informació algebraica puguem codificar els nostres objectes de manera precisa, se li contraposa el fet que no tota corba algebraica (el conjunt de zeros d'un polinomi en dues variables) sigui «parametritzable». Per exemple, la cúbica de Fermat (vegeu la figura 2), d'equació tan simple com $x^3 + y^3 = 1$, no admet una parametrització del tipus $(x(t), y(t))$, amb $x(t)$ i $y(t)$ funcions racionals de t , com a (1).

Aquesta situació és pròpia de la geometria algebraica, en contrast amb el que passa en les geometries lineal, diferencial o analítica, en les quals gairebé tot objecte pot definir-se de manera paramètrica i implícita, almenys localment.

FIGURA 2: Gràfic de la corba de Fermat $x^3 + y^3 = 1$.

Com que al món del disseny assistit per ordinador la quantitat de corbes que es necessiten per tenir una precisió raonable és molt poca (a costa d'utilitzar altres mecanismes d'ajust que no discutirem aquí), diguem que ens limitarem a considerar solament aquelles corbes que són «parametritzables», és a dir, aquelles que tenen una representació de la forma $(x(t), y(t))$ amb $x(t), y(t) \in \mathbb{K}(t)$, el cos de funcions racionals amb coeficients en $\mathbb{K}$ i indeterminada t . Aquí, denotarem per $\mathbb{K}$ el cos base que generalment serà el dels números reals (el cos per excel·lència del disseny visual), però també designarà de vegades els números racionals $\mathbb{Q}$, els números complexos $\mathbb{C}$, o fins i tot algun cos finit.

Tenir fórmules explícites i senzilles per passar d'una representació (paramètrica o implícita) a l'altra és de molta utilitat en aquest camp, i la cerca i el disseny d'aquestes formulacions constitueixen una àrea actual de recerca.

Passar de representació implícita a paramètrica és un problema força difícil, ja que s'ha de començar per detectar si la corba en qüestió és «parametritzable» o no, i després aconseguir una forma paramètrica que la representi. Resultats efectius sobre com es resol el problema de la parametrització poden trobar-se a [41, 42, 46], però els mètodes que es proposen en aquests treballs són molt complicats i utilitzen tècniques de geometria algebraica no elementals, la complexitat de les quals encara no està ben entesa.

En contrast, passar de la forma paramètrica a una implícita és relativament senzill, tant des d'un punt de vista teòric com computacional. En aquest cas, l'anomenat *teorema d'eliminació* [24, 23] ens diu que es poden manipular algebraicament les equacions com hem après a fer-ho en cursos elementals d'àlgebra, eliminar la variable t i quedar-nos amb una expressió en les variables x i y que ens donarà l'equació que busquem.

Vegem com funciona aquest teorema amb l'exemple de la parametrització donada a (1). De les identitats

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2}, \end{cases}$$

arribem al sistema polinòmic

$$\begin{cases} (1+t^2)x - (1-t^2) = 0 \\ (1+t^2)y - 2t = 0, \end{cases} \quad (3)$$

i d'aquestes dues equacions hem d'«eliminar» la variable t per quedar-nos amb una expressió en x i y .

Si alguna de les dues expressions que apareix a (3) fos lineal en t , es podria resoldre el sistema expressant t en funció de l'altra variable (a partir de l'equació lineal en t), i reemplaçant aquesta expressió després en l'altra equació per arribar a una expressió que depengui solament de x i de y . Però l'exponent que apareix en cada polinomi de (3) és quadràtic, la qual cosa fa que hàgim d'utilitzar altres mètodes d'eliminació, i aquí és on apareix en escena la «resultant de

Sylvester» que va ser introduïda per Sylvester el 1853 a [45], i que ens diu que el determinant d'aquesta matriu

$$\begin{pmatrix} -1+x & 0 & 1+x & 0 \\ 0 & -1+x & 0 & 1+x \\ y & -2 & y & 0 \\ 0 & y & -2 & y \end{pmatrix} \quad (4)$$

és una expressió equivalent a la que resulta d'haver eliminat la variable t en (3). El lector pot comprovar que calculant explícitament aquest determinant s'obté

$$4(-1+x^2+y^2),$$

un múltiple del polinomi que defineix la circumferència unitària (2).

En general, donats dos polinomis $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ i $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$ de graus m i n , respectivament, la resultant de Sylvester d'aquests polinomis és el determinant de la matriu quadrada de $n+m$ files i columnes següent:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_m & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

on les primeres n files contenen els coeficients de f disposats en la forma que s'indica més amunt, les últimes m files contenen els coeficients de g , i en la resta de la matriu hi ha zeros. És molt senzill de verificar que en el cas de (3), amb

$$f(t) = (-1+x) + 0t + (1+x)t^2,$$

$$g(t) = y - 2t + y t^2,$$

la matriu de Sylvester es converteix en (4).

La resultant de Sylvester és el que es denomina *polinomi d'eliminació* en el sentit que el determinant de la matriu (5) pertany a l'ideal generat per f i per g (és a dir, s'escriu com $Af + Bg$, amb A i B també polinomis), però ja no involucra la variable t . D'alguna manera, hem aconseguit «canviar» les equacions $f = 0$ i $g = 0$ per una altra equació que ja no depèn de t , hem eliminat la variable t .

Aquesta «resolució» via resultants del problema de la implicitació pot aplicar-se de manera general: donada una parametrització de la forma

$$\mathbb{K} \dashrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$t \mapsto \left(\frac{x_N(t)}{x_D(t)}, \frac{y_N(t)}{y_D(t)} \right), \quad (6)$$

on $x_N(t)$, $x_D(t)$, $y_N(t)$, $y_D(t)$ són polinomis en la variable t no tots ells constants, tals que $\text{mcd}(x_N(t), x_D(t)) = \text{mcd}(y_N(t), y_D(t)) = 1$, i el símbol « $\dashrightarrow$ » significa que la funció està definida a $\mathbb{K}$ llevat d'un conjunt finit de punts (els zeros dels denominadors), es pot utilitzar la resultant de Sylvester per eliminar t en les expressions

$$\begin{cases} f(t) = x \cdot x_D(t) - x_N(t) \\ g(t) = y \cdot y_D(t) - y_N(t), \end{cases} \quad (7)$$

i obtenir (una potència de) l'equació implícita de la corba que s'obté com l'adherència de la imatge de l'aplicació (6). La demostració d'aquest resultat pot trobar-se en el capítol d'eliminació i extensió de [24].

Si els polinomis que codifiquen la parametrització (6) tenen grau menor o igual a n , la matriu de Sylvester que calcula la resultant tindrà $2n$ files i columnes. Se sap que el polinomi en (x, y) que resulta de calcular el determinant també té el seu grau fitat per n , i genèricament és un polinomi irreductible de grau n . Encara més, si la parametrització és «genèricament injectiva» (és a dir, la funció és injectiva a $\mathbb{K}$ llevat d'un nombre finit de punts), i té grau igual que n (el «grau de la parametrització» és el màxim dels graus dels 4 polinomis que la codifiquen), llavors l'expressió resultant serà un polinomi irreductible de grau n . Altrament, el polinomi que resulta d'eliminar t usant la resultant de Sylvester serà una potència d'un polinomi irreductible. Aquest polinomi irreductible és el que defineix la corba. Dit en fórmules

$$\text{Res}_t(x \cdot x_D(t) - x_N(t), y \cdot y_D(t) - y_N(t)) = E(x, y)^d, \quad (8)$$

on $\text{Res}_t(\cdot, \cdot)$ designa la resultant de Sylvester que «elimina» la variable t , $E(x, y)$ és el polinomi irreductible que defineix la corba, i $d \geq 1$. De fet, l'exponent d és l'anomenat *índex de traçat*, que és la quantitat de vegades que la parametrització recorre la corba (en el cas d'aplicacions genèricament injectives es té $d = 1$).

En conclusió, donada una parametrització de grau n , hi ha una matriu quadrada de dimensió $2n$ tal que el seu determinant ens produeix la seva equació implícita. Podrem trobar matrius més petites que produeixin el mateix efecte? Certament, hi ha matrius més petites per calcular resultants, per exemple, les «matrius de Bézout» (cf. [1]) que redueixen les dimensions a la meitat, però la pregunta és si es podrien canviar els polinomis que apareixen a (7) per uns de menor grau tals que la seva resultant també produeixi l'equació implícita de la corba.

Aquest tema va ser el que va atreure diversos investigadors del disseny geomètric assistit per ordinador a principis dels anys noranta, i que va donar origen a una interacció molt fructífera entre l'àlgebra commutativa, la geometria algebraica i el modelatge geomètric que continua fins avui dia. Vegem com va començar la història.

1 Rectes mòbils i μ -bases

Les «rectes mòbils» van ser introduïdes per Thomas Sederberg i els seus col·laboradors a la sèrie d'articles [40, 38, 39, 25]. El concepte de *recta mòbil* es basa en l'observació següent: cada fila de la matriu de Sylvester que apareix a (4) codifica l'equació d'una recta en el pla (x, y) amb valors «mòbils» determinats pel paràmetre t . Per exemple, la primera fila de (4) correspon a la recta mòbil

$$(1 + t^2) \cdot x - (1 - t^2) = 0, \quad (9)$$

mentre que l'última fila d'aquesta matriu codifica la recta

$$(t + t^3) \cdot y - 2t^2 = 0. \quad (10)$$

Per a cada valor del paràmetre t , s'obté l'equació d'una recta en el pla (x, y) que tallarà la circumferència precisament en el punt de la corba corresponent al valor de t en la parametrització (1). Això ens permet pensar aquestes rectes com a famílies de rectes que «segueixen» la parametrització juntament amb el valor del paràmetre (vegeu la figura 3).

DEFINICIÓ 1. Una *recta mòbil* de grau δ que segueix la parametrització (6) és un polinomi $\mathcal{L}_\delta(t, x, y) = u(t)x + v(t)y + w(t) \in \mathbb{K}[t, x, y]$, amb

$$\max\{\deg(u), \deg(v), \deg(w)\} = \delta,$$

tal que

$$\mathcal{L}_\delta \left(t, \frac{x_N(t)}{x_D(t)}, \frac{y_N(t)}{y_D(t)} \right) = 0. \quad (11)$$

Noteu que trivialment els polinomis que apareixen a (7) són rectes mòbils que segueixen la parametrització. A més a més, si multipliquem qualsevol recta mòbil d'aquestes per un polinomi $z(t)$ qualsevol, el resultat serà una altra recta mòbil (de grau major) amb la mateixa propietat de seguir la parametrització.

El conjunt de rectes mòbils que segueixen una parametrització té una estructura de *mòdul* sobre l'anell de polinomis $\mathbb{K}[t]$. De fet, és el mòdul de sizígies (syzygies) o relacions de la terna

$$(x_N(t) \cdot y_D(t), y_N(t) \cdot x_D(t), x_D(t) \cdot y_D(t)), \quad (12)$$

que són les coordenades homogènies de la parametrització (6).

No direm gaire res més en aquest sentit, atès que la definició de rectes mòbils no requereix comprendre conceptes com sizígies o *mòduls*. De fet, calcular rectes mòbils que segueixen una parametrització donada és molt senzill ja que, fixat δ , els coeficients dels polinomis $u(t)$, $v(t)$ i $w(t)$ són les solucions del sistema d'equacions lineals determinats per la identitat (11).

Amb aquesta definició geomètricament molt elemental, el mètode d'«implicitació via rectes mòbils», tal com va ser formulat a [40] diu essencialment: busqueu un conjunt de rectes mòbils de grau menor o igual que δ , amb δ tan

petit com sigui possible, tal que aquestes rectes siguin «independents» en el sentit que la matriu dels seus coeficients (com a polinomi en t) tingui rang màxim. Amb una mica de sort, trobareu $\delta + 1$ formes, amb la qual cosa podreu construir una matriu quadrada que contingui tots els coeficients (com a polinomi en t) d'aquestes rectes. Calculeu el determinant de la matriu, i obtindreu un múltiple no trivial de l'equació implícita. Si heu «triat bé» les rectes mòbils independents, el determinant serà igual a $E(x, y)^d$.

Això és el que passa a la matriu (4): a les seves files hi ha codificades 4 rectes mòbils de grau 3 linealment independents, i el determinant d'aquesta matriu ens dona l'equació implícita de la circumferència unitària. Es podrà construir una matriu de rectes mòbils de grau menor? La resposta és que sí, i un exercici molt senzill per al lector és resoldre les equacions que apareixen a (11) amb la parametrització (1) i $\delta = 1$, i trobar dues rectes mòbils linealment independents com les següents:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(t, x, y) &= y - (x + 1)t, \\ \mathcal{L}_1^*(t, x, y) &= (-1 + x) + ty.\end{aligned}$$

Amb els coeficients d'aquestes rectes construïm una matriu de 2×2 :

$$\begin{pmatrix} y & -1 - x \\ -1 + x & y \end{pmatrix}, \quad (13)$$

el determinant de la qual és $x^2 + y^2 - 1$, que dona lloc a l'equació implícita que estàvem buscant. Noteu que aquesta matriu té la meitat de files que (4), amb la qual cosa hem aconseguit d'alguna manera «simplificar» el problema de la implicitació.

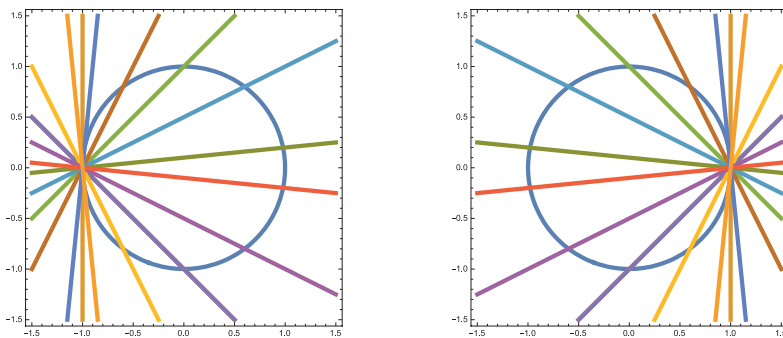


FIGURA 3: Rectes mòbils $\mathcal{L}_1$ (a l'esquerra) i $\mathcal{L}_1^*$ (a la dreta).

Es pot fer això de manera sistemàtica amb una parametrització genèrica com a (6)? Quin és el valor de δ més petit possible? Aquesta pregunta va ser resposta per Hilbert fa més de cent anys, i redescoberta per la comunitat de modelatge geomètric a [25].

TEOREMA 2. *Donada una parametrització com a (6) de grau n , existeixen un únic $\mu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \mu \leq \frac{n}{2}$, i dues rectes mòbils $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$, $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$ que segueixen la parametrització, tal que qualsevol altra recta mòbil que segueix (6) és una combinació polinòmica d'aquestes dues, és a dir, que tota $\mathcal{L}_\delta(t, x, y)$ com en la definició 1 es pot expressar en la forma*

$$\mathcal{L}_\delta(t, x, y) = p(t)\mathcal{P}_\mu(t, x, y) + q(t)\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y),$$

amb $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ de graus fitats per $\delta - \mu$ i $\delta - n + \mu$, respectivament.

Els polinomis $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$ i $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$ poden calcular-se explícitament sense necessitat de conèixer δ a priori, utilitzant una «resolució lliure» de l'ideal generat pels 3 polinomis que apareixen a (12), i hi ha algorismes eficients per fer aquests càlculs; vegeu, per exemple, [9].

Noteu que encara que els algorismes generals per calcular resolucions lliures estan basats en càlculs amb «bases de Gröbner» que en general tenen una complexitat de càlcul molt alta, l'avantatge en aquesta situació és que l'ideal que estem considerant és del tipus «Hilbert-Burch». Això vol dir que els coeficients dels polinomis $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$ i $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$ apareixen en les columnes de la matriu de 2×3 de les primeres sizígies de la resolució. A més a més, els menors maximals (amb signe) d'aquesta matriu ens donen les «coordenades» de la parametrització. En l'exemple de la parametrització (1), la matriu de Hilbert-Burch és

$$\begin{bmatrix} -t & 1 & -t \\ 1 & t & -1 \end{bmatrix},$$

i calculant els menors maximals amb signe d'aquesta matriu, obtenim

$$-(1 - t^2, 2t, 1 + t^2),$$

un múltiple no trivial del vector (12) que codifica la parametrització (1). Adreçem el lector a [25] per a més detalls sobre la demostració del teorema 2.

DEFINICIÓ 3. Un parell de rectes mòbils $\{\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)\}$ com en el teorema 2 s'anomenen una μ -base de la parametrització (6).

Noteu que òbviament del teorema 2 només es desprèn la unicitat del valor de μ i no de la μ -base. De fet, si $\mu = n - \mu$ (la qual cosa passa genèricament si n és parell), llavors qualsevol combinació $\mathbb{K}$ -lineal genèrica d'elements d'una μ -base és una altra μ -base. Si $\mu < n - \mu$, llavors el parell $\{\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)\}$ pot reemplaçar-se per $\{\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y) + r(t)\mathcal{P}_\mu(t, x, y)\}$ amb $r(t)$ de grau fitat per $n - 2\mu$, i produir una nova μ -base.

La raó per la qual és important calcular μ -bases no és solament perquè amb elles podem generar totes les rectes mòbils que segueixen una parametrització (i, en particular, trobar-ne $\delta + 1$ linealment independents per omplir una matriu de rectes mòbils tal que el seu determinant ens dona l'equació implícita), sinó que a més a més hi ha una connexió molt directa entre μ -bases, resultants i l'equació implícita d'una parametrització. Aquest resultat va ser demostrat a [25, teorema 1].

TEOREMA 4. Amb la notació anterior es té:

$$\text{Res}_t(\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)) = E(x, y)^d. \quad (14)$$

Aquest teorema ens dóna un mètode per calcular matrius de rectes mòbils. En efecte, la majoria de les matrius que calculen resultants de Sylvester (per exemple, les que es descriuen a [1]) tenen en la seva codificació els coeficients de les rectes mòbils que són potències de t multiplicades pels elements d'una μ -base.

També ens diu que la dimensió de la matriu de rectes mòbils serà de $n \times n$, ja que cada coeficient d'aquesta matriu és lineal respecte de (x, y) , i el grau de $E(x, y)$ és genèricament n . Llavors, el valor de δ esperat és $\delta = n - 1$, i precisament la matriu de Sylvester del parell $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$, $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$ és una d'aquestes matrius.

Es pot calcular la resultant entre dos polinomis $f(t)$ i $g(t)$ amb matrius més petites que la presentada a (5). De fet, es pot reduir la dimensió d'aquesta matriu fins a gairebé la meitat utilitzant un enginyós mètode donat per Bézout i que consisteix en el següent: donats $f(t)$ i $g(t)$ tots dos de grau fitat per n , fem

$$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} x^i y^j.$$

Resulta que la resultant entre f i g també és el determinant de la matriu $(a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$. Aquesta matriu es coneix com a *matriu de Bézout*.

Hi ha connexions interessants entre totes aquestes formulacions. De fet, si denotem per Sylv_t (resp. Bez_t) la matriu de Sylvester (resp. Bézout) per calcular la resultant de dos polinomis en la variable t , a [7, proposició 6.1] vam demostrar amb Laurent Busé el següent:

TEOREMA 5. Existeix una matriu invertible $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que

$$\text{Sylv}_t(\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)) = M \cdot \text{Bez}_t(x \cdot x_D(t) - x_N(t), y \cdot y_D(t) - y_N(t)).$$

Aquest resultat mostra que essencialment les μ -bases contenen la mateixa informació que la parametrització (6), i que la seva utilització pot simplificar formulacions ja conegudes per a les altres. També les μ -bases codifiquen bastant bé propietats geomètriques de la parametrització (vegeu per exemple [22, 10]).

2 Còniques mòbils, cúbiques mòbils...

Qualsevol de les matrius que apareixen a l'enunciat del teorema 5 té dimensió n , la qual cosa ens dóna una cota inferior per al mètode d'implicitació per rectes mòbils. Es podrà aconseguir calcular l'equació implícita amb matrius més petites?

Una resposta a aquesta pregunta s'obté amb formulacions més compactes per calcular la resultant com el determinant d'una matriu més petita. Per exemple, podríem utilitzar la matriu de Bézout del teorema 5

$$\text{Bez}_t(\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)),$$

que té una mida més petita ($n - \mu$ files i columnes) que la matriu de Sylvester dels polinomis $\mathcal{P}_\mu$ i $\mathcal{Q}_{n-\mu}$. Notem que els coeficients d'aquesta matriu més compacta ja no codificaran rectes mòbils com en el cas de la matriu de Sylvester, ja que seran quadràtics en x, y .

De tota manera, a causa de l'estructura especial de la matriu de Bézout (vegeu per exemple [39]), es poden llegir en les files d'aquesta matriu els coeficients d'un polinomi que també s'anul·la quan s'especialitzen les variables x, y en la parametrització ϕ . Això motiva la definició següent. Homogeneïtzarem totes les variables per poder controlar millor els graus i els invariants geomètrics del problema. Així doncs, la nostra parametrització ϕ és

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\longmapsto (u_0(t_0, t_1) : u_1(t_0, t_1) : u_2(t_0, t_1)), \end{aligned} \quad (15)$$

on $\mathbb{P}^1$ i $\mathbb{P}^2$ designen la recta i el pla projectiu sobre $\mathbb{K}$, respectivament, i $u_i(t_0, t_1)$, $0 \leq i \leq 2$ són polinomis homogenis del mateix grau sense factors comuns en $\mathbb{K}[t_0, t_1]$.

DEFINICIÓ 6. Una *corba mòbil* de bigrau (δ, ν) que segueix la parametrització ϕ donada a (15) és un polinomi homogeni en X_0, X_1, X_2 de grau ν , i també homogeni en t_0, t_1 de grau δ , tal que

$$\mathcal{L}(t_0, t_1, u_0(t_0, t_1), u_1(t_0, t_1), u_2(t_0, t_1)) = 0.$$

Si fem $\nu = 1$, recuperarem la definició de rectes mòbils que vam donar a (1). Si $\nu = 2$, el polinomi es diu una *cònica mòbil* que segueix ϕ [49]. De la mateixa manera, denominarem *cúbiques mòbils* les corbes amb $\nu = 3$, i així successivament.

Una sèrie de formulacions realitzades en els anys noranta per Sederberg i els seus col·laboradors van posar en evidència un fet interessant: es pot calcular l'equació implícita de la corba imatge de ϕ definida a (15), que anomenarem C , com el determinant d'una matriu de coeficients de corbes mòbils que segueixen la parametrització. Aquest fet és fàcil de comprovar, el sorprenent és que les singularitats de la corba aparentment ajuden a determinar quina classe de corbes mòbils cal triar i, com més singular sigui la corba (és a dir, com més «complicades» siguin les singularitats), més simple serà la descripció d'aquestes corbes mòbils. Per exemple, el resultat següent apareix a [38]:

TEOREMA 7. *L'equació implícita d'una corba racional de grau 4 parametritzada per polinomis «sense punts de base» (i. e. sense factors en comú) es pot expressar com el determinant d'una matriu de 2×2 . Si la corba no té un punt triple, llavors cada element del determinant és una cònica mòbil. Altrament, una fila és lineal i l'altra és cúbica.*

Per il·lustrar aquest resultat, considerem els exemples següents.

EXEMPLE. Siguin

$$u_0(t_0, t_1) = t_0^4 - t_1^4, \quad u_1(t_0, t_1) = -t_0^2 t_1^2, \quad u_2(t_0, t_1) = t_0 t_1^3. \quad (16)$$

Aquests polinomis defineixen una parametrització ϕ com a (15). Estudiant les singularitats de la corba definida pels polinomis anteriors es veu fàcilment que $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2$ és un punt de multiplicitat 3 (vegeu la figura 4). En aquest cas, tenim —en el llenguatge de les μ -bases introduït abans— que $\mu = 1$, i es pot verificar també fàcilment que

$$\mathcal{L}_{1,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) = t_0 X_2 + t_1 X_1$$

és una recta mòbil que segueix ϕ . El lector també pot verificar fàcilment que la cúbica mòbil següent de bigrau (1, 3) segueix la parametrització:

$$\mathcal{L}_{1,3}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) = t_0(X_1^3 + X_0 X_2^2) + t_1 X_2^3,$$

i la matriu 2×2 del teorema 7 es pot construir amb els coeficients de les formes $\mathcal{L}_{1,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2)$ i $\mathcal{L}_{1,3}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2)$, expressades com a polinomis en t_0, t_1 :

$$\begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ X_1^3 + X_0 X_2^2 & X_2^3 \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu ens dóna l'equació implícita: $X_2^4 - X_1^4 - X_0 X_1 X_2^2 = 0$.

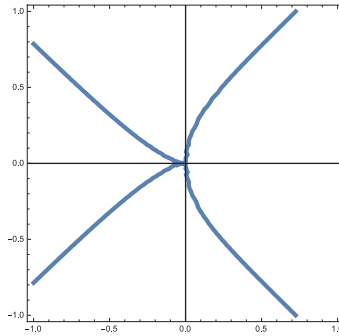


FIGURA 4: Gràfica de la corba parametritzada per (16).

EXEMPLE. Reproduïm aquí l'exemple 2.7 que apareix a [18]. Considerem

$$u_0(t_0, t_1) = t_0^4, \quad u_1(t_0, t_1) = 6t_0^2 t_1^2 - 4t_1^4, \quad u_2(t_0, t_1) = 4t_0^3 t_1 - 4t_0 t_1^3. \quad (17)$$

Aquesta parametrització dóna una corba de grau 4 amb 3 nodes (vegeu la figura 5). Es pot verificar fàcilment que les dues còniques mòbils següents de grau 1 segueixen la parametrització:

$$\mathcal{L}_{1,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) = t_0(X_1X_2 - X_0X_2) + t_1(-X_2^2 - 2X_0X_1 + 4X_0^2),$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{1,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) = t_0\left(X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - 2X_0X_1\right) + t_1(X_0X_2 - X_1X_2).$$

Com en l'exemple anterior, la matriu 2×2 dels coeficients d'aquestes còniques mòbils és una de les matrius del teorema 7 i, calculant explícitament el seu determinant, obtenim l'equació implícita:

$$X_2^4 + 4X_0X_1^3 + 2X_0X_1X_2^2 - 16X_0^2X_1^2 - 6X_0^2X_2^2 + 16X_0^3X_1 = 0.$$

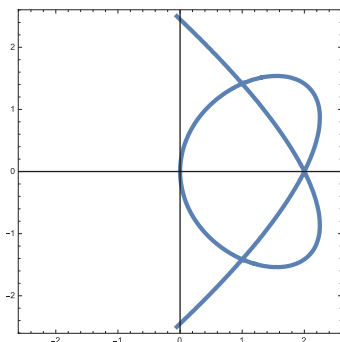


FIGURA 5: Gràfica de la corba parametritzada per (16).

3 L'ideal de corbes mòbils de ϕ

Ara és un bon moment per introduir algunes eines de l'àlgebra que ens ajudaran a comprendre les construccions geomètriques que hem presentat abans. Per exemple, el conjunt de totes les corbes mòbils que segueixen una parametrització donada genera un ideal bihomogeni a $\mathbb{K}[t_0, t_1, X_0, X_1, X_2]$ que anomenarem *ideal de les corbes mòbils* d'aquesta parametrització.

Tal com ho hem explicat anteriorment, el mètode de corbes mòbils per calcular l'equació implícita d'una corba donada per una parametrització racional, com a (15), busca proveir «receptes» de determinants de matrius les entrades de les quals són els coeficients de corbes mòbils que segueixen la parametrització i que tenen grau baix en t_0, t_1 . Per fer això, és d'utilitat tenir una descripció com en el teorema 2 d'un conjunt de corbes mòbils minimal, a partir de les quals es puguin expressar tots els altres elements de l'ideal de corbes mòbils.

Afortunadament, l'àlgebra commutativa proveeix del llenguatge i les eines adequades per resoldre aquest problema. A [18], David Cox va demostrar que buscar un conjunt minimal de corbes mòbils és el mateix que calcular un conjunt minimal de generadors del nucli $\mathcal{K}$ del morfisme d'anells següent:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[t_0, t_1, X_0, X_1, X_2] &\longrightarrow \mathbb{K}[t_0, t_1, z] \\ t_i &\longmapsto t_i & i = 0, 1, \\ X_j &\longmapsto u_j(t_0, t_1) z & j = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

En aquesta definició, z és una nova variable. El resultat següent apareix a [18, Nice Fact 2.4] (vegeu també [8] per al cas en el qual ϕ no és «genèricament» injectiva):

TEOREMA 8. $\mathcal{K}$ és l'ideal de corbes mòbils de ϕ .

Analitzem una mica més de prop l'aplicació (18). Designem amb $I \subset \mathbb{K}[t_0, t_1]$ l'ideal generat per $u_0(t_0, t_1)$, $u_1(t_0, t_1)$, $u_2(t_0, t_1)$. La imatge de (18) és de fet isomorfa a l'objecte que en àlgebra commutativa s'anomena *àlgebra de Rees de I* .

Per ser més precisos, donat un anell commutatiu R qualsevol i un ideal $I \subset R$, l'àlgebra de Rees de I es defineix com a

$$\text{Rees}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n \cdot z^n \subset R[z],$$

amb z una nova variable. Tornant a la nostra situació concreta de més amunt, utilitzant els teoremes d'isomorfia estàndard de l'àlgebra, tenim que $\mathbb{K}[t_0, t_1, X_0, X_1, X_2]/\mathcal{K}$ és isomorf a l'àlgebra de Rees de l'ideal I .

Des d'un punt de vista geomètric, l'àlgebra de Rees d'un ideal està associada, segons el diccionari ideals $\leftrightarrow$ varietats algebraïques, amb l'anomenat *blow-up* de la varietat definida per I . En el nostre cas, com que els polinomis no tenen factors comuns, la varietat de zeros de l'ideal I és en realitat la «varietat buida» que no té gaire interès geomètric, però seria interessant entendre aquesta àlgebra per acabar confirmant matemàticament el que es veu experimentalment: en presència de singularitats molt especials de la corba parametritzada, la descripció de $\mathcal{K}$ se simplifica.

Vegem amb més claredat això que hem dit sense gaire precisió amb un exemple: el cas $\mu = 1$ va ser exhaustivament estudiat per diversos autors: [30, 20, 3, 13]. Es té que $\mu = 1$ si, i solament si, la parametrització és pròpia (és a dir, l'antiimatge de la fibra genèrica de (15) té cardinal 1) i hi ha un punt sobre la corba C amb multiplicitat $n - 1$, que és la màxima multiplicitat que un punt pot tenir sobre una corba de grau n . Si és aquest el cas, llavors $\mathcal{K}$ té exactament $n + 1$ generadors minimal, una quantitat lineal en el grau de la corba.

Per a $\mu = 2$, Laurent Busé va demostrar a [3], utilitzant tècniques de dualitat desenvolupades per Jouanolou a [34], que, per a tota parametrització d'una corba de grau n que té $\mu = 2$ i solament punts dobles com a singularitats, el nucli $\mathcal{K}$ es pot generar amb $\frac{(n+1)(n-4)}{2} + 5$ elements i no amb menys. En l'altra

situació, en un treball conjunt amb Teresa Cortadellas ([15], vegeu també [37]), hem demostrat que si hi ha un punt de multiplicitat major que 2 (es pot demostrar que solament pot haver-hi un tal punt singular), llavors el nombre de generadors de $\mathcal{K}$ es redueix a $\lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor$, és a dir, que la descripció d'aquest ideal és més simple en aquest cas. En ambdues situacions (només punts dobles o un sol punt de multiplicitat molt alta) s'han calculat explícitament aquests generadors (vegeu [3, 15, 37]).

A més a més, en tots dos casos ($\mu = 1, 2$), s'han explicitat conjunts de generadors minimalis de $\mathcal{K}$ en funció de la parametrització ϕ . Però, per a $\mu \geq 3$, sabem molt poc sobre la seva quantitat i els seus bigraus. Designem amb $n_0(\phi)$ el *nombre zero de Betti* de $\mathcal{K}$ (és a dir, el cardinal de qualsevol conjunt minimal de generadors d'aquest ideal). A [26] vam proposar el problema següent, del qual tenim encara pocs resultats:

PROBLEMA. Descriure tots els valors possibles de $n_0(\phi)$ i els paràmetres dels quals depèn aquesta funció per a una parametrització pròpia ϕ com a (15).

Per evitar confusions, recordem aquí que «propi», en aquest context, significa que ϕ és genèricament injectiva. Com a il·lustració d'aquest problema, hem explicat més amunt que, per a $\mu = 1$, $n_0(\phi) = n + 1$, i si $\mu = 2$, el valor de $n_0(\phi)$ depèn de si hi ha un punt molt singular o no. Ens preguntem si $n_0(\phi)$ és una funció que depèn únicament de n , de μ i de l'estructura de punts múltiples de C , o si hi ha encara altres paràmetres més intrínsecs dels quals depèn aquest valor.

Un problema més ambiciós que refina l'anterior és el següent: designem amb $\mathcal{B}(\phi) \subset \mathbb{N}^2$ el conjunt (comptats amb «multiplicitats») dels bigraus d'un sistema minimal de generadors de $\mathcal{K}$.

PROBLEMA. Descriure tots els valors possibles de $\mathcal{B}(\phi)$.

Per exemple, si $\mu = 1$, tenim (vegeu [13, teorema 2.9]),

$$\mathcal{B}(\phi) = \{(0, n), (1, 1), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n-1, 1)\}.$$

També es té una descripció explícita de $\mathcal{B}(\phi)$ en el cas $\mu = 2$ (vegeu [3, 15, 37]). En aquesta situació, aquest conjunt depèn essencialment de l'existència d'una singularitat de multiplicitat major que 2.

Per a $\mu = 3$, la situació és més complexa, com mostra l'exemple següent que apareix a [15]: considerem les parametritzacions ϕ_1 i ϕ_2 tals que les seves μ -bases són, respectivament,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{3,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= t_0^3 X_0 + (t_1^3 - t_0 t_1^2) X_1, \\ \mathcal{Q}_{7,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= (t_0^6 t_1 - t_0^2 t_1^5) X_0 + (t_0^4 t_1^3 + t_0^2 t_1^5) X_1 + (t_0^7 + t_1^7) X_2, \\ \mathcal{P}_{3,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= (t_0^3 - t_0^2 t_1) X_0 + (t_1^3 + t_0 t_1^2 - t_0^2 t_1) X_1, \\ \mathcal{Q}_{7,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= (t_0^6 t_1 - t_0^2 t_1^5) X_0 + (t_0^4 t_1^3 + t_0^2 t_1^5) X_1 + (t_0^7 + t_1^7) X_2. \end{aligned}$$

Cadascuna d'aquestes parametritzacions descriu pròpiament una corba en el pla de grau 10 que passa pel punt $(0 : 0 : 1)$ amb multiplicitat 7. La resta d'ells

són o bé punts dobles o triples. Calculant explícitament, tenim:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\phi_1) &= \{(3, 1), (7, 1), (2, 3), (2, 3), (4, 2), (2, 4), (1, 6), (1, 6), (1, 6), (0, 10)\}, \\ \mathcal{B}(\phi_2) &= \{(3, 1), (7, 1), (2, 3), (2, 3), (4, 2), (2, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 6), (0, 10)\}.\end{aligned}$$

L'exemple posa en evidència que en general els paràmetres dels quals depenen $n_0(\phi)$ i $\mathcal{B}(\phi)$ són invariants més fins que solament el grau de la corba, μ i les singularitats d'aquesta. Un altre exemple curiós que va ser estudiat a [14] és quan hi ha un generador minimal de bigrau $(1, 2)$ en $\mathcal{K}$. Allí es mostra que en aquesta situació, si ϕ està parametritzada per polinomis de grau n , el conjunt $\mathcal{B}(\phi)$ és «constant» i igual a

$$\begin{cases} \left\{ (0, n), (1, 2), (1, n-2), (2, n-4), \dots, \left(\frac{n-1}{2}, 1\right), \left(\frac{n+1}{2}, 1\right) \right\} & \text{si } n \text{ és senar} \\ \left\{ (0, n), (1, 2), (1, n-2), (2, n-4), \dots, \left(\frac{n}{2}, 1\right), \left(\frac{n}{2}, 1\right) \right\} & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

També a [16] s'estudien amb detall $n_0(\phi)$, $\mathcal{B}(\phi)$ i altres invariants més profunds de parametritzacions de corbes «monomials». En cada cas s'obtenen resultats molt particulars i bastant diferents entre si. Seria interessant tenir un «diccionari global» que ens permeti entendre com canvien aquestes funcions n_0 i $\mathcal{B}$, a mesura que els coeficients de la parametrització ϕ van canviant.

Per definir pròpiament aquest «diccionari», procedim com a [25, secció 3]: per a $n \geq 1$, designem amb $\mathbb{V}_n \subset (\mathbb{K}[t_0, t_1]_n)^3$ el conjunt de triplets de polinomis homogenis $(u_0(t_0, t_1), u_1(t_0, t_1), u_2(t_0, t_1))$ definint una parametrització pròpia com a (15). Notem que es pot considerar $\mathbb{V}_n$ com un obert en una varietat algebraica a l'espai de paràmetres de la parametrització ϕ . Encara més, $\mathbb{V}_n$ podria prendre's essencialment com el quocient d'un obert dens a $(\mathbb{K}[t_0, t_1]_n)^3$ via l'acció de $\text{SL}(2, \mathbb{K})$ sobre els monomis t_0, t_1 .

PROBLEMA. Descriure els subconjunts de $\mathbb{V}_n$ on $\mathcal{B}(\phi)$ és constant.

Notem que naturalment la μ -base està continguda a $\mathcal{K}$ i, a més a més, es té [8, proposició 3.6]:

$$\mathcal{K} = \langle \mathcal{P}_\mu(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) \rangle : \langle t_0, t_1 \rangle^\infty,$$

o sigui que el rol de la μ -base és crucial per estudiar $\mathcal{K}$ i els seus generadors. De fet, se sap que tot conjunt minimal de generadors de $\mathcal{K}$ conté una μ -base, així que els parells $(1, \mu)$, $(1, n - \mu)$ són sempre elements de $\mathcal{B}(\phi)$. També ho és $(0, n)$, que és el bigrau de l'equació implícita. L'estudi de la geometria de $\mathbb{V}_n$ com a funció del paràmetre μ s'ha fet a [25, secció 3] (vegeu també [31, 21]). A més a més, una anàlisi molt interessant de la μ -base d'una parametrització, amb μ genèric ($\mu = \lfloor n/2 \rfloor$) i punts singulars de molta multiplicitat, s'ha fet a [22]. Seria interessant tenir resultats similars per a $\mathcal{K}$.

En aquest context, una manera possible de modelar una resposta a l'evidència experimental proveïda per Sederberg i els seus col·laboradors sobre el fet que

com més singular és la corba més simple és la descripció de $\mathcal{K}$ és la següent: per a $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}_n$ designem amb $\overline{\mathbb{W}}$ la clausura de $\mathbb{W}$ en la topologia de Zariski d'aquest espai.

CONJECTURA. Si $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}_n$ són tals que $n_0|_{\mathbb{W}_i}$ és constant per a $i = 1, 2$, i $\overline{\mathbb{W}}_1 \subset \overline{\mathbb{W}}_2$, llavors

$$n_0|_{\mathbb{W}_1} \leq n_0|_{\mathbb{W}_2}.$$

Demostrar aquesta conjectura és equivalent a verificar que la funció $n_0(\phi)$ és *semicontínua superiorment* a $\mathbb{V}_n$ amb la topologia de Zariski. Com a conseqüència d'aquesta afirmació podríem demostrar el fet següent, que encara és un problema obert:

CONJECTURA. Sigui $\mathbb{W}_\mu \subset \mathbb{V}_n$ l'obert de totes les parametritzacions pròpies de corbes amb $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$ i tal que totes les seves singularitats són punts dobles. Llavors, $n_0(\phi)$ és constant a $\mathbb{W}_\mu$, i assoleix el seu valor màxim en aquesta varietat.

Noteu que un refinament de la primera conjectura que hem fet abans amb $\mathcal{B}(\mathbb{W}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{W}_2)$ no pot ser cert en general, com ho mostren els exemples calculats per a $\mu = 2$ a [3, 15, 37]: els bigraus dels generadors minimalis de $\mathcal{K}$ en el cas menys genèric no apareixen en el conjunt de bigraus del cas general.

4 Solament corbes racionals planes?

Al llarg d'aquest text hem treballat amb parametritzacions de corbes racionals planes, però el disseny assistit per ordinador també manipula corbes i superfícies a l'espai tridimensional, i la majoria dels conceptes, mètodes i propietats que hem mostrat fins ara es poden estendre en dues direccions. La primera d'elles consisteix a considerar parametritzacions de superfícies racionals a l'espai, és a dir, aplicacions de la forma

$$\begin{aligned} \phi_S: \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1 : t_2) &\longmapsto (u_0(t_0, t_1, t_2) : u_1(t_0, t_1, t_2) : u_2(t_0, t_1, t_2) : u_3(t_0, t_1, t_2)), \end{aligned} \quad (19)$$

on $u_i(t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{K}[t_0, t_1, t_2]$, $i = 0, 1, 2, 3$, són polinomis homogenis del mateix grau i sense factors comuns. Òbviament es poden estudiar també aplicacions com (19) en dimensions superiors, però restringirem la presentació a aquest cas. El motiu pel qual ϕ_S no està necessàriament definida en tot $\mathbb{P}^2$ és perquè, tot i les condicions imposades en els polinomis $u_i(t_0, t_1, t_2)$, $i = 0, 1, 2, 3$, l'aplicació pot no estar definida en tot el pla projectiu. Per exemple, si

$$\begin{aligned} u_0(t_0, t_1, t_2) &= t_1 t_2, \\ u_1(t_0, t_1, t_2) &= t_0 t_2, \\ u_2(t_0, t_1, t_2) &= t_0 t_1, \\ u_3(t_0, t_1, t_2) &= t_0 t_1 + t_1 t_2, \end{aligned}$$

ϕ_S no estarà definida en el conjunt $\{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}$, ja que en aquests punts s'anul·len tots els polinomis $u_i(t_0, t_1, t_2)$, $0 \leq i \leq 3$.

Per a aquesta situació també hi ha mètodes per calcular l'equació implícita de la clausura de Zariski de la imatge de ϕ_S , anàlegs als presentats abans per a corbes en el pla. Per exemple, es pot utilitzar una *resultant multivariada* o una resultant *esparsa* (*sparse* en anglès) (tal com es defineixen a [23]) per calcular aquesta equació implícita. Altres eines de la teoria de l'eliminació, com els *determinants de complexos*, també poden ser utilitzades per produir matrius tals que el seu determinant (o quocient o màxim comú divisor d'alguns subdeterminants) dona aquest polinomi [8, 5]. En els últims anys s'han estudiat també *matrius de representació* [4, 2] d'aquestes parametritzacions, que són matrius no necessàriament quadrades, d'entrades polinomials, amb rang màxim, tals que quan són especialitzades les variables en punts de $\mathbb{P}^3$, el rang d'aquesta matriu decreix si, i solament si, el punt està en la superfície.

El mètode de les rectes i corbes mòbils presentat abans per a corbes en el pla té una generalització denominada *mètode de plans i superfícies mòbils* que segueixen ϕ_S , i tant la seva descripció com l'anàlisi de la seva utilitat per a la implicitació són bastant més complicades, ja que tant l'àlgebra com la geometria implicades en aquesta situació tenen més dificultats (vegeu [38, 19, 17, 6, 35]).

Per il·lustrar un d'aquests problemes, vegem un dels primers obstacles que ens apareixen en aquestes generalitzacions: encara que s'ha demostrat a [11] que existeix un equivalent a les μ -bases en aquest context, el seu càlcul no sembla tan fàcil de descriure com ho era en el cas de les corbes en el pla. Part del motiu d'aquesta dificultat és que el mòdul de sizígies o relacions dels polinomis $u_i(t_0, t_1, t_2)$, $i = 0, 1, 2, 3$, ja no és lliure com en el cas de les corbes, així que no té sentit parlar d'una *base* tal com la teníem en l'altre cas.

Tot i això, sorprenentment, si es fa $t_0 = 1$ i es consideren aquests polinomis com a «afins» en 2 variables, el mòdul de sizígies sí que és lliure, però encara no és possible controlar els graus dels elements d'una μ -base (se'n poden veure els detalls a [11, proposició 2.1]). Algunes descripcions explícites d'aquesta situació s'han fet per a parametritzacions de baix grau o amb una certa estructura (vegeu, per exemple, [12, 47, 43, 44]), però el panorama general encara s'està explorant.

Una generalització de l'aplicació (18) associada a (19) també és directa, i podríem considerar l'ideal de definició de l'àlgebra de Rees associada a ϕ_S . Se sap molt poc sobre els generadors minimalis del nucli $\mathcal{K}$ en aquest context. A [13] vam estudiar el cas de les *superfícies monoides*, que són aquelles superfícies racionals que tenen un punt amb la major multiplicitat possible (aquesta situació pot ser considerada com una generalització del cas $\mu = 1$ per a corbes en el pla), i aquests resultats van ser generalitzats a parametritzacions denominades *de Jonquières* a [27].

També vam treballar a [13] (vegeu també [28]) en el cas en el qual hi ha dos plans mòbils linealment independents de grau 1 que segueixen la parametrització, amb unes altres condicions geomètriques (una altra generalització possible del cas $\mu = 1$ per a les corbes), però la descripció general de l'ideal de definició de l'àlgebra de Rees per al cas de superfícies és avui dia una àrea fèrtil plena de problemes oberts que conviden a la seva recerca.

L'altra direcció possible en la generalització de parametritzacions de corbes en el pla és considerar corbes a l'espai. Això vol dir aplicacions de la forma

$$\begin{aligned}\phi_C: \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1) &\longmapsto (u_0(t_0, t_1) : u_1(t_0, t_1) : u_2(t_0, t_1) : u_3(t_0, t_1)),\end{aligned}$$

on $u_i(t_0, t_1) \in \mathbb{K}[t_0, t_1]$, $i = 0, 1, 2, 3$, són polinomis homogenis del mateix grau en t_0, t_1 , i sense factors en comú. En aquest cas, la imatge de ϕ_C és una corba a $\mathbb{P}^3$, i s'ha de reemplaçar «la» equació implícita d'abans (corbes en el pla) per «les» equacions implícites, ja que n'hi haurà més d'una (de la mateixa manera que les equacions implícites de la recta que passa per $(1 : 0 : 0 : 1)$ i $(0 : 0 : 0 : 1)$ en $\mathbb{P}^3$ són $X_1 = 0$ i $X_2 = 0$).

Tal com va ser explicat a [25], hi ha un anàleg dels teoremes 2 i 8 per a aquesta situació, així que aquí hi ha més eines teòriques i computacionals per estudiar invariants de ϕ_C . Per exemple, a [22], les singularitats d'una corba espacial es van estudiar com a funció d'una certa «forma canònica» de la μ -base. Altres càlculs van ser realitzats a [36] per explorar generalitzacions del cas $\mu = 1$ per a corbes espacials i produir generadors de $\mathcal{K}$ en aquest cas. Però aquests generadors no són minimalis, i estan molt lluny de ser-ho.

Més intents de resoldre el problema s'han fet a [32, 29, 33] per a alguns valors específics de graus dels generadors de la μ -base, i en els treballs recents [31, 21] s'ha fet una primera estratificació en funció de μ per estudiar certs invariants d'aquestes parametritzacions en l'esperit dels problemes que hem proposat més amunt.

En conclusió, tal com segurament el lector ha pogut apreciar llegint aquest text, actualment hi ha molta activitat en relació amb aquest tema, i encara moltes preguntes obertes i problemes per resoldre. Esperem que en un futur no gaire llunyà puguem entendre de manera més global i profunda aquest tema, i ser capaços d'aplicar aquests resultats al disseny assistit per ordinador i a altres àrees de la informàtica.

Agraïments

Agraeixo a Teresa Cortadellas Benítez pels comentaris i correccions a una primera versió d'aquest text. Tots els gràfics en aquest text han estat realitzats per l'autor utilitzant el programa *Mathematica* [48]. Aquest treball ha estat finançat pel projecte MTM2013-40775-P del Ministeri d'Economia i Competitivitat de l'Estat espanyol.

Referències

- [1] APÉRY, F.; JOUANOLLOU, J.-P. *Élimination: le cas d'une variable*. París: Hermann, 2006. (Collection Méthodes)

- [2] BOTBOL, N.; DICKENSTEIN, A. «Implicitization of rational hypersurfaces via linear syzygies: a practical overview». *J. Symbolic Comput.*, 74 (2016), 493–512.
- [3] BUSÉ, L. «On the equations of the moving curve ideal of a rational algebraic plane curve». *J. Algebra*, 321 (8) (2009), 2317–2344.
- [4] BUSÉ, L. «Implicit matrix representations of rational Bézier curves and surfaces». *Comput.-Aided Des.*, 46 (2014), 14–24.
- [5] BUSÉ, L.; CHARDIN, M.; JOUANOLLOU, J.-P. «Torsion of the symmetric algebra and implicitization». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137 (6) (2009), 1855–1865.
- [6] BUSÉ, L.; COX, D.; D'ANDREA, C. «Implicitization of surfaces in $\mathbb{P}^3$ in the presence of base points». *J. Algebra Appl.*, 2 (2) (2003), 189–214.
- [7] BUSÉ, L.; D'ANDREA, C. «Singular factors of rational plane curves». *J. Algebra*, 357 (2012), 322–346.
- [8] BUSÉ, L.; JOUANOLLOU, J.-P. «On the closed image of a rational map and the implicitization problem». *J. Algebra*, 265 (1) (2003), 312–357.
- [9] CAPANI, A.; DE DOMINICIS, G.; NIESI, G.; ROBBIANO, L. «Computing minimal finite free resolutions». *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118 (1997), 105–117.
- [10] CASAS-ALVERO, E. «Syzygies and projective generation of plane rational curves». *J. Algebra*, 427 (2015), 183–214.
- [11] CHEN, F.; COX, D.; LIU, Y. «The μ -basis and implicitization of a rational parametric surface». *J. Symbolic Comput.*, 39 (6) (2005), 689–706.
- [12] CHEN, F.; SHEN, L.; DENG, J. «Implicitization and parametrization of quadratic and cubic surfaces by μ -bases». *Computing*, 79 (2–4) (2007), 131–142.
- [13] CORTADELLAS BENÍTEZ, T.; D'ANDREA, C. «Minimal generators of the defining ideal of the Rees algebra associated to monoid parameterizations». *Comput. Aided Geom. Design*, 27 (6) (2010), 461–473.
- [14] CORTADELLAS BENÍTEZ, T.; D'ANDREA, C. «Rational plane curves parameterizable by conics». *J. Algebra*, 373 (2013), 453–480.
- [15] CORTADELLAS BENÍTEZ, T.; D'ANDREA, C. «Minimal generators of the defining ideal of the Rees algebra associated with a rational plane parametrization with $\mu = 2$ ». *Canad. J. Math.*, 66 (6) (2014), 1225–1249.
- [16] CORTADELLAS BENÍTEZ, T.; D'ANDREA, C. «The Rees algebra of a monomial plane parametrization». *J. Symbolic Comput.*, 70 (2015), 71–105.
- [17] COX, D. A. «Equations of parametric curves and surfaces via syzygies». *A: Symbolic computation: solving equations in algebra, geometry, and engineering* (South Hadley, MA, 2000). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001, 1–20. (Contemp. Math.; 286)
- [18] COX, D. A. «The moving curve ideal and the Rees algebra». *Theoret. Comput. Sci.*, 392 (1–3) (2008), 23–36.
- [19] COX, D.; GOLDMAN, R.; ZHANG, M. «On the validity of implicitization by moving quadrics of rational surfaces with no base points». *J. Symbolic Comput.*, 29 (3) (2000), 419–440.

- [20] COX, D.; HOFFMAN, J. W.; WANG, H. «Syzygies and the Rees algebra». *J. Pure Appl. Algebra*, 212 (7) (2008), 1787–1796.
- [21] COX, D. A.; IARROBINO, A. A. «Strata of rational space curves». *Comput. Aided Geom. Design*, 32 (2015), 50–68.
- [22] COX, D.; KUSTIN, A. R.; POLINI, C.; ULRICH, B. «A study of singularities on rational curves via syzygies». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 222 (1045) (2013), 116 p.
- [23] COX, D. A.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Using algebraic geometry*. 2a ed. Nova York: Springer, 2005. (Graduate Texts in Mathematics; 185)
- [24] COX, D.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. 3a ed. Nova York: Springer, 2007. (Undergraduate Texts in Mathematics)
- [25] COX, D. A.; SEDERBERG, T. W.; CHEN, F. «The moving line ideal basis of planar rational curves». *Comput. Aided Geom. Design*, 15 (8) (1998), 803–827.
- [26] D'ANDREA, C. «Moving curve ideals of rational plane parametrizations». A: *Computer algebra and polynomials*. Cham: Springer, 2015, 30–49. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 8942)
- [27] HASSANZADEH, S. H.; SIMIS, A. «Implicitization of de Jonquières parametrizations». *J. Commut. Algebra*, 6 (2) (2014), 149–172.
- [28] HOFFMAN, J. W.; WANG, H. «Defining equations of the Rees algebra of certain parametric surfaces». *J. Algebra Appl.*, 9 (6) (2010), 1033–1049.
- [29] HOFFMAN, J. W.; WANG, H.; JIA, X.; GOLDMAN, R. «Minimal generators for the Rees algebra of rational space curves of type $(1, 1, d - 2)$ ». *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 3 (4) (2010), 602–632.
- [30] HONG, J.; SIMIS, A.; VASCONCELOS, W. V. «On the homology of two-dimensional elimination». *J. Symbolic Comput.*, 43 (4) (2008), 275–292.
- [31] IARROBINO, A. «Strata of vector spaces of forms in $R = k[x, y]$, and of rational curves in $\mathbb{P}^k$ ». *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 45 (4) (2014), 711–725.
- [32] JIA, X.; GOLDMAN, R. « μ -bases and singularities of rational planar curves». *Comput. Aided Geom. Design*, 26 (9) (2009), 970–988.
- [33] JIA, X.; WANG, H.; GOLDMAN, R. «Set-theoretic generators of rational space curves». *J. Symbolic Comput.*, 45 (4) (2010), 414–433.
- [34] JOUANLOU, J. P. «Formes d'inertie et résultant: un formulaire». *Adv. Math.*, 126 (2) (1997), 119–250.
- [35] KHETAN, A.; D'ANDREA, C. «Implicitization of rational surfaces using toric varieties». *J. Algebra*, 303 (2) (2006), 543–565.
- [36] KUSTIN, A. R.; POLINI, C.; ULRICH, B. «Rational normal scrolls and the defining equations of Rees algebras». *J. Reine Angew. Math.*, 650 (2011), 23–65.
- [37] KUSTIN, A.; POLINI, C.; ULRICH, B. «The bi-graded structure of symmetric algebras with applications to Rees rings». *J. Algebra*, 469 (2017), 188–250.

- [38] SEDERBERG, T. W.; CHEN, F. «Implicitization using moving curves and surfaces». A: MAIR, S. G.; COOK, R. (ed.). *SIGGRAPH '95 Proceedings of the 22nd annual conference on computer graphics and interactive techniques*. Nova York: ACM, 1995, 301–308.
- [39] SEDERBERG, T.; GOLDMAN, R.; DU, H. «Implicitizing rational curves by the method of moving algebraic curves». *J. Symbolic Comput.*, 23 (2–3) (1997), 153–175.
- [40] SEDERBERG, T. W.; SAITO, T.; QI, D. X.; KLIMASZEWSKI, K. S. «Curve implicitization using moving lines». *Comput. Aided Geom. Design*, 11 (6) (1994), 687–706.
- [41] SENDRA, J. R.; WINKLER, F. «Symbolic parametrization of curves». *J. Symbolic Comput.*, 12 (6) (1991), 607–631.
- [42] SENDRA, J. R.; WINKLER, F.; PÉREZ-DÍAZ, S. *Rational algebraic curves. A computer algebra approach*. Berlín: Springer, 2008. (Algorithms and Computation in Mathematics; 22)
- [43] SHI, X.; GOLDMAN, R. «Implicitizing rational surfaces of revolution using μ -bases». *Comput. Aided Geom. Design*, 29 (6) (2012), 348–362.
- [44] SHI, X.; WANG, X.; GOLDMAN, R. «Using μ -bases to implicitize rational surfaces with a pair of orthogonal directrices». *Comput. Aided Geom. Design*, 29 (7) (2012), 541–554.
- [45] SYLVESTER, J. J. «On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's function and that of the greatest algebraical common measure». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, part III (1853), 407–548. També publicat a *Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*. Vol. 1. Chelsea Publishing Co., 1973, 429–586.
- [46] VAN HOEIJ, M. «Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor». *J. Symbolic Comput.*, 23 (2–3) (1997), 209–227.
- [47] WANG, X.; CHEN, F. «Implicitization, parameterization and singularity computation of Steiner surfaces using moving surfaces». *J. Symbolic Comput.*, 47 (6) (2012), 733–750.
- [48] WOLFRAM RESEARCH, INC. *Mathematica*. Version 8.0. Champaign, IL, 2010.
- [49] ZHANG, M.; CHIONH, E.-W.; GOLDMAN, R. N. «On a relationship between the moving line and moving conic coefficient matrices». *Comput. Aided Geom. Design*, 16 (6) (1999), 517–527.

Detecció d'ones gravitatòries

JOAN GIRBAU

És per la Ment que se m'obra Natura
A l'ull golós; per ella em sé immortal
Puix que l'ordén, i ençà i allà del mal,
El temps és ú i pel meu ordre dura.

J. V. Foix (1893–1987)

Resum: L'objectiu d'aquest article és presentar la teoria bàsica d'ones gravitatòries i explicar, per a un lector matemàtic que tingui alguns coneixements de relativitat general, els mètodes que es poden usar per detectar-les. Explicarem també els trets fonamentals de l'observació duta a terme el 14 de setembre de 2015 pels detectors de LIGO.

Paraules clau: gravitació, ones gravitacionals, GW150914.

Classificació MSC2010: 83C35.

Introducció

L'11 de febrer de 2016 el web de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-waves Observatory) publicava la notícia següent: «El 14 de setembre de 2015 a les 5:51, hora de l'Est (9:51 de temps universal coordinat), els dos detectors bessons de LIGO situats, respectivament, a Livingston (Louisiana) i Hanford (Washington) van mesurar ondulacions en el teixit de l'espai temps —ones gravitacionals— que arribaven a la Terra procedents d'un cataclisme en l'Univers llunyà. Els dos detectors de LIGO acabaven d'entrar en funcionament per a les primeres observacions quan aquell senyal fort i clar va ser captat». L'endemà d'aquesta notícia el president Obama felicitava l'equip de científics de LIGO amb el tuit següent: «Einstein tenia raó! Felicitats a @NSF i @LIGO per la detecció d'ones gravitacionals, un avenç gegantí en la nostra comprensió de l'Univers».

La història de les ones gravitatòries comença el 1916, ara fa un segle. Aquell any Einstein va publicar els articles [7] i [8], on introdueix la relativitat general i estableix que les pertorbacions gravitacionals es propaguen per ones a la velocitat de la llum. Malgrat que mai fins ara no s'havien detectat directament, sí que se n'havia demostrat l'existència pels seus efectes. L'any 1974, Joseph Taylor i Russell Hulse van observar dues estrelles de neutrons que giraven l'una entorn de l'altra cada vegada més de pressa seguint un model de pèrdua d'energia per emissió d'ones gravitatòries. La taxa d'acceleració causada per la suposada emissió d'ones, d'acord amb la relativitat general, coincidia exactament amb les observacions. Per aquest descobriment, Taylor i Hulse van rebre el Nobel de Física l'any 1993.

Des de principi del segle actual han entrat en funcionament diversos observatoris dedicats a la detecció d'ones gravitatòries per interferometria. LIGO, als Estats Units, és el més antic i més gran. Va entrar en funcionament el 2002, però ha estat remodelat molt recentment (Advanced LIGO). També hi ha detectors a Itàlia (VIRGO), a Alemanya (GEO600) i al Japó (TAMA300). I cal remarcar que l'Agència Europea de l'Espai, en col·laboració amb la NASA, ha posat en òrbita recentment (el 2 de desembre de 2015) un detector espacial molt ambiciós anomenat Laser Interferometer Space Antenna (LISA).

Amb la detecció d'ones gravitacionals realitzada per LIGO s'obre una nova era en el nostre coneixement de l'Univers. En efecte, les ones gravitatòries ens poden aportar una informació que les ones electromagnètiques no ens poden donar. Per exemple, en l'explosió d'una supernova les ones electromagnètiques són dispersades una vegada i una altra per la matèria que rodeja l'estrella; les ones gravitatòries, no. De la mateixa manera, no podem esperar cap informació dels primers moments de l'Univers a través d'ones electromagnètiques (la famosa radiació còsmica de fons només ens aporta informació de l'anomenada *època de la recombinació*, entre 200 000 i 300 000 anys després del Big Bang), però a través de les ones gravitacionals, sí.

L'objectiu d'aquest article és presentar la teoria bàsica d'ones gravitatòries i explicar els mètodes que es poden usar per detectar-les. No cal dir que hi ha una amplíssima bibliografia de llibres i revistes sobre el tema. Vegeu, per exemple [13, 14], a part dels articles recents sobre la detecció concreta d'ones realitzada per LIGO el 14 de setembre de 2015 [1, 2, 3, 4]. Oferim aquí una presentació detallada dels trets bàsics de la teoria (amb demostracions rigoroses dels fets rellevants) per a un lector matemàtic que tingui alguns coneixements de relativitat general.

1 Preliminars matemàtics

En aquesta secció tractarem alguns temes matemàtics que convé recordar abans d'abordar la qüestió central d'aquest article, que és l'existència i els mètodes de detecció de les ones gravitatòries.

1.1 Ones periòdiques planes

Sigui $\vec{n}$ un vector unitari de $\mathbb{R}^3$ i a un número real. Designarem per $P_{\vec{n},a}$ el pla de $\mathbb{R}^3$ donat per $P_{\vec{n},a} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } \vec{x} \cdot \vec{n} = a\}$.

Una *ona periòdica i plana* de $\mathbb{R}^3$ és una funció

$$\begin{aligned} A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, t) &\rightarrow A(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

que compleix les propietats següents:

1. Existeix un vector unitari $\vec{n}$ (anomenat *direcció de propagació*) tal que si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P_{\vec{n},a}$, llavors $A(\vec{x}_1, t) = A(\vec{x}_2, t)$ per a tot t . És a dir, dos punts del mateix pla $P_{\vec{n},a}$ tenen sempre el mateix valor de A .
2. Existeix un número real v , anomenat *velocitat de propagació*, tal que si posem $\vec{v} = v\vec{n}$ es compleix $A(\vec{x} + \vec{v}\tau, t + \tau) = A(\vec{x}, t)$ per a tots $\vec{x}, t, \tau$. Això es llegeix dient que el valor de l'ona a l'instant t en el punt $\vec{x}$ és el mateix que el valor en el punt $\vec{x} + \vec{v}\tau$ a l'instant $t + \tau$.
3. $A(\vec{0}, t)$ és una funció periòdica de t .

PROPOSICIÓ 1. Una ona periòdica i plana, $A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sempre es pot expressar de la forma $A(\vec{x}, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$, on $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció periòdica de període 2π , ω és un número real i $\vec{k}$ és el vector $(\omega/v)\vec{n}$. El vector $\vec{k}$ s'anomena vector d'ona i ω s'anomena freqüència angular.

PROVA. Sigui $A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una ona periòdica i plana de vector de propagació $\vec{n}$ i velocitat de propagació v . Sigui $g(t) = A(\vec{0}, t)$, que és una funció periòdica. Sigui T el seu període. Posem $\omega = 2\pi/T$. Definim $f(t) = g(t/\omega)$. Llavors $f(t)$ és periòdica de període 2π .

Fixat $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sigui $\vec{u} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$, de manera que $\vec{x}$ s'expressa com a suma $\vec{x} = \vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$. Tindrem

$$A(\vec{x}, t) = A(\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}, t) = A\left(\vec{u} + v\vec{n} \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right), t\right) = A\left(\vec{u}, t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right).$$

Ara bé, com que $\vec{u}$ està sobre el pla d'equació $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ que conté l'origen, resulta

$$A(\vec{x}, t) = A\left(\vec{u}, t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right) = A\left(\vec{0}, t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right) = g\left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right) = f\left(\omega t - \frac{\omega(\vec{x} \cdot \vec{n})}{v}\right).$$

Si posem $\vec{k} = \omega\vec{n}/v$, obtindrem $A(\vec{x}, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$. $\square$

EXEMPLE. L'exemple típic d'ona periòdica i plana és l'ona de la forma $A(\vec{x}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)$, on $\vec{k}$ és un cert vector de $\mathbb{R}^3$ i ω, φ i A_0 són números reals. Fent un canvi d'origen de temps, l'ona anterior s'expressa com a $A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ (o bé com a $A_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$). Per comoditat, es treballa amb l'ona complexa

$$\varphi(\vec{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

de la qual $A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ és la part real. També es pot treballar amb

$$\psi(\vec{x}, t) = A_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

que té la mateixa part real.

Cal remarcar que la suma de dues ones periòdiques i planes no és una ona periòdica i plana.

1.2 Alguns conceptes relatius a les varietats pseudoriemannianes

Comencem recordant que una varietat pseudoriemanniana (M, g) es defineix de manera anàloga a una varietat riemanniana, amb l'única diferència que els productes escalars g_x , que en les varietats riemannianes s'exigeix que siguin definits positius per a cada $x \in M$, en les pseudoriemannianes només es demana que siguin no singulars (això vol dir que $g_x(u, v) = 0$ per a tot u implica $v = 0$).

Si bé suposarem conegudes del lector les nocions bàsiques sobre varietats pseudoriemannianes, explicitem ara algunes propietats que necessitarem i que, pel fet de no formar part dels coneixements considerats més bàsics, poden ser desconegudes del lector.

1.2.1 Camps de Jacobi en varietats pseudoriemannianes Sigui $\gamma(t)$ una corba d'una varietat pseudoriemanniana (M, g) . Suposem que t varia en un interval tancat $I = [a, b]$. Una *variació de la corba* γ és una aplicació contínua

$$\begin{aligned} \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I &\rightarrow M \\ (s, t) &\rightarrow \alpha(s, t), \end{aligned}$$

diferenciable en cada punt interior de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times I$, que compleix $\alpha(0, t) = \gamma(t)$.

Per a cada $(s_0, t_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I$ definim els vectors $\partial/\partial s$ i $\partial/\partial t$ de l'espai tangent $T_{\alpha(s_0, t_0)}(M)$ com els vectors respectivament tangents a les corbes $s \rightarrow \alpha(s, t_0)$ i $t \rightarrow \alpha(s_0, t)$ (només seran camps definits sobre la imatge de α). El camp $\partial/\partial s$ s'anomena *camp transvers de la variació*.

Considerem ara una geodèsica $\gamma(t)$ de (M, g) i una variació α de γ que compleixi la condició que per a cada s la corba $t \rightarrow \alpha(s, t)$ sigui geodèsica. Una tal variació direm que és una *variació de γ per geodèsiques* i provarem que compleix la propietat següent:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = R \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1)$$

En efecte, com que les derivades parcials commuten, es té $[\partial/\partial t, \partial/\partial s] = 0$, i, per tant,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Resulta, doncs,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} + R \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Però com que totes les corbes $t \rightarrow \alpha(s, t)$ són geodèsiques, es té $\nabla_{\partial/\partial t} \partial/\partial t = 0$ i la igualtat anterior es converteix en (1).

La igualtat (1) s'utilitza per definir el concepte de *camp de Jacobi* al llarg d'una geodèsica:

DEFINICIÓ 2. Sigui γ una geodèsica de (M, g) . Un camp vectorial ξ sobre la corba s'anomena *camp de Jacobi* si compleix l'equació

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \xi = R(\dot{\gamma}, \xi) \dot{\gamma}.$$

Els càlculs anteriors demostren el teorema següent:

TEOREMA 3. *La restricció sobre una geodèsica del camp transvers d'una variació d'aquesta geodèsica per geodèsiques és un camp de Jacobi.*

El recíproc d'aquest teorema és també cert, de demostració relativament senzilla, però nosaltres no el necessitem.

1.2.2 Derivada de Lie La derivada de Lie $L_X K$ d'un camp tensorial K respecte a un camp vectorial X es defineix de la manera següent: Sigui $\{\varphi_t\}$ el grup uniparamètric local de transformacions associat al camp vectorial X . $L_X K$ és el camp tensorial del mateix tipus que el camp K que en cada punt $x \in M$ val

$$(L_X K)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((d\varphi_t)^{-1}(K_{\varphi_t(x)}) - K_x).$$

Es demostra que si Y és un camp vectorial, $L_X Y = [X, Y]$, i que si f és una funció, $L_X(f) = X(f)$. També es demostra que L_X és una derivació que commuta amb les contraccions, i, per tant, si α és un camp tensorial dues vegades covariant, hom té:

$$(L_X \alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha([X, Y], Z) - \alpha(Y, [X, Z]). \quad (2)$$

Malgrat que el concepte de derivada de Lie és un concepte propi de les varietats diferenciables, sense cap estructura addicional, en el cas que estiguem en una varietat pseudoriemanniana aquesta expressió es pot escriure d'una altra manera, tal com ens assegura la proposició següent:

PROPOSICIÓ 4. *Si α és un tensor dues vegades covariant en una varietat pseudoriemanniana, es compleix*

$$(L_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(Y, \nabla_Z X).$$

PROVA. La derivada covariant de α té l'expressió següent (similar a (2)):

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Aïllant d'aquí $X(\alpha(Y, Z))$ i substituint $\nabla_X Y$ per $\nabla_Y X + [X, Y]$ i $\nabla_X Z$ per $\nabla_Z X + [Z, X]$, s'obté

$$X(\alpha(Y, Z)) = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(Y, \nabla_Z X) + \alpha([X, Y], Z) + \alpha(Y, [X, Z]).$$

Substituint això a (2) resulta l'expressió desitjada. $\square$

COROLLARI 5. *En una varietat pseudoriemanniana (M, g) hom té*

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

PROVA. Basta aplicar la proposició anterior al tensor mètric g tenint en compte que $\nabla_X g = 0$ per a qualsevol camp vectorial X . $\square$

1.2.3 Pertorbació de la curvatura produïda per una pertorbació de la mètrica Sigui (M, g) una varietat pseudoriemanniana de dimensió n . Sigui g' una altra mètrica pseudoriemanniana pròxima a g , de la forma $g' = g + h$. L'objectiu d'aquesta secció és establir un resultat (teorema 6) que expressi de manera aproximada els tensors de curvatura i de Ricci de g' en funció de h i dels tensors corresponents de g .

Designem per ∇ la connexió associada a g i per ∇' la connexió associada a g' . Posem

$$Q(X, Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y,$$

on X i Y són camps vectorials. Si f és una funció, llavors

$$Q(X, fY) = \nabla'_X(fY) - \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla'_X Y - X(f)Y - f\nabla_X Y = fQ(X, Y).$$

Igualment es prova que $Q(fX, Y) = fQ(X, Y)$ i que $Q(X, Y) = Q(Y, X)$. Així, doncs, Q és un camp tensorial dues vegades covariant i una vegada contravariant, simètric en els factors covariants. Designem per $R'(X, Y)Z$ el tensor de curvatura de g' i per $R(X, Y)Z$ el de g . Volem ara expressar la diferència entre els dos tensors de curvatura (el de g' i el de g) en funció del tensor Q . Tindrem:

$$\begin{aligned} R'(X, Y)Z &= \nabla'_X \nabla'_Y Z - \nabla'_Y \nabla'_X Z - \nabla'_{[X, Y]} Z = \\ &= \nabla'_X (\nabla_Y Z + Q(Y, Z)) - \nabla'_Y (\nabla_X Z + Q(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z - Q([X, Y], Z) = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + Q(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X Q(Y, Z) + Q(X, Q(Y, Z)) - \\ &\quad - \text{el mateix, permutant } X \text{ i } Y - \nabla_{[X, Y]} Z - Q([X, Y], Z) = \\ &= R(X, Y)Z + Q(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X Q(Y, Z) + Q(X, Q(Y, Z)) - \\ &\quad - \text{el mateix, permutant } X \text{ i } Y - Q([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Recordem que $\nabla_X Q$ s'expressa de la forma següent:

$$(\nabla_X Q)(Y, Z) = \nabla_X(Q(Y, Z)) - Q(\nabla_X Y, Z) - Q(Y, \nabla_X Z).$$

Si a l'expressió anterior de $R'(X, Y)Z$ substituïm el terme $\nabla_X Q(Y, Z)$ per $(\nabla_X Q)(Y, Z) + Q(\nabla_X Y, Z) + Q(Y, \nabla_X Z)$, tindrem:

$$R'(X, Y)Z = R(X, Y)Z + (\nabla_X Q)(Y, Z) - (\nabla_Y Q)(X, Z) + Q(X, Q(Y, Z)) - Q(Y, Q(X, Z)). \quad (3)$$

Voldríem expressar ara aquesta mateixa fórmula en components, però abans hauríem de precisar les notacions que usarem relatives a les components d'un tensor. En primer lloc convindrem que índexs repetits a dalt i a baix indicaran sempre que s'ha de sumar respecte a aquests índexs (malgrat que s'hagi suprimit el sumatori). D'altra banda, si t és un tensor r vegades contravariant i s vegades covariant, que en una carta local s'expressa

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

(recordem que per la convenció anterior no explicitem els sumatoris), designarem per $\nabla_i t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ les components de la derivada covariant $\nabla_{\partial/\partial x_i} t$. És a dir:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} t = \nabla_i t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Haurem de precisar també la convenció que fem servir per escriure l'ordre dels índexs de les components del tensor de curvatura:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = R_{ijk}^r \frac{\partial}{\partial x^r}.$$

Amb aquestes convencions, expressem ara la fórmula (3) en components:

$$R_{ijk}^r = R_{ijk}^r + \nabla_j Q_{ki}^r - \nabla_k Q_{ji}^r + Q_{jl}^r Q_{ki}^l - Q_{kl}^r Q_{ji}^l. \quad (4)$$

Voldríem expressar el tensor Q en funció de la mètrica inicial g i de h (recordeu que $g' = g + h$). Hem d'utilitzar ara la ben coneguda fórmula de Riemann que dona la derivada covariant en funció de la mètrica:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X])\}. \quad (5)$$

Utilitzant aquesta fórmula tindrem:

$$\begin{aligned} 2g'(Q(X, Y), Z) &= 2g'(\nabla'_X Y - \nabla_X Y, Z) = \\ &= X(g'(Y, Z)) + Y(g'(Z, X)) - Z(g'(X, Y)) - g'(X, [Y, Z]) - \\ &\quad - g'(Y, [X, Z]) - g'(Z, [Y, X]) - 2g'(\nabla_X Y, Z). \end{aligned}$$

Substituint aquí g' per $g + h$ i utilitzant una altra vegada la fórmula de Riemann (5), ens queda:

$$2g'(Q(X, Y), Z) = X(h(Y, Z)) + Y(h(Z, X)) - Z(h(X, Y)) - \\ - h(X, [Y, Z]) - h(Y, [X, Z]) - h(Z, [Y, X]) - 2h(\nabla_X Y, Z).$$

Substituïm ara el terme $X(h(Y, Z))$ d'aquesta expressió per $(\nabla_X h)(Y, Z) + h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z)$, i els termes $Y(h(Z, X))$ i $Z(h(X, Y))$ per expressions similars. Ens queda, finalment:

$$2g'(Q(X, Y), Z) = (\nabla_X h)(Y, Z) + (\nabla_Y h)(Z, X) - (\nabla_Z h)(X, Y).$$

Aquesta fórmula s'expressa en components de la manera següent:

$$Q_{jk}^i = \frac{1}{2} g'^{il} (\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{lj} - \nabla_l h_{jk}), \quad (6)$$

on (g'^{il}) indica, com sempre, la matriu inversa de (g'_{il}) .

Per tenir Q en funció de g i de h tal com volem, hauríem d'expressar en la fórmula anterior la matriu inversa (g'^{il}) de (g'_{il}) en funció de la mètrica inicial g i de h . No perseguim una fórmula exacta, sinó que ens acontentarem amb una expressió aproximada tenint en compte que suposem que la diferència h entre g' i g és petita i té derivades petites (més endavant ja precisarem el sentit d'aquestes paraules). De $g' = g + h = g(1 + g^{-1}h)$, on 1 indica la matriu identitat, deduïm $g'^{-1} = (1 + g^{-1}h)^{-1}g^{-1}$. Designem per H la matriu $g^{-1}h$. Com que

$$(1 + H)^{-1} = 1 - H + H^2 - H^3 + \dots,$$

negligint els termes d'ordre > 1 en h , tindrem $g'^{-1} = (1 + H)^{-1}g^{-1} \approx g^{-1} - Hg^{-1} = g^{-1} - g^{-1}hg^{-1}$. Per tant:

$$g'^{jk} \approx g^{jk} - g^{jl}h_{li}g^{ik}. \quad (7)$$

D'ara endavant utilitzarem la mètrica inicial g per identificar cada espai tangent amb el seu dual. Això ens permetrà identificar, quan ens convingui, tensors covariants i contravariants (pujarem i baixarem índexs utilitzant la mètrica inicial g). La fórmula anterior s'escriu llavors:

$$g'^{jk} \approx g^{jk} - h^{jk}. \quad (8)$$

Substituint aquesta expressió a (6) i suprimint els termes d'ordre > 1 en h , obtindrem:

$$Q_{jk}^i \approx \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{lj} - \nabla_l h_{jk}). \quad (9)$$

Quan substituïm aquesta expressió a (4), els termes en els quals hi ha un producte de dues Q resultaran d'ordre > 1 en h . Per tant, només haurem de

calcular en funció de h els termes que contenen una derivada covariant de Q . Operant, tenim finalment:

$$R'_{ijk} \approx R_{ijk}^r + \frac{1}{2} g^{rl} \left\{ \nabla_j \nabla_k h_{il} - \nabla_k \nabla_j h_{il} + \nabla_j \nabla_i h_{lk} - \nabla_j \nabla_l h_{ki} + \nabla_k \nabla_l h_{ij} - \nabla_k \nabla_i h_{lj} \right\}. \quad (10)$$

D'aquesta fórmula podem obtenir les components del tensor de Ricci per contracció dels índexs r, j , ja que $R_{ik} = R_{irk}^r$. Operant ens queda

$$R'_{ik} \approx R_{ik} + \frac{1}{2} g^{rl} (\nabla_r \nabla_k h_{il} + \nabla_r \nabla_i h_{lk} - \nabla_r \nabla_l h_{ki}) - \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \text{tr } h, \quad (11)$$

on $\text{tr } h$ designa la traça de h , o sigui, $g^{rl} h_{rl}$.

Podem resumir tot el que hem fet en el teorema següent:

TEOREMA 6. *Sigui (M, g) una varietat pseudoriemanniana. Sigui h un camp tensorial d'ordre 2, simètric, tal que $g' = g + h$ continuï sent una mètrica pseudoriemanniana. Aleshores el tensor de curvatura i el tensor de Ricci de g' s'expressen en funció dels tensors corresponents de g per les fórmules (10) i (11), on el símbol $\approx$ significa que els membres que figuren a la dreta i a l'esquerra del símbol difereixen en un terme $T(h)$ que depèn de h , tal que $\lim_{t \rightarrow 0} T(th)/t = 0$ (és a dir, un terme d'ordre > 1 en h).*

2 Rudiments de relativitat general

L'any 1905, Einstein va introduir la relativitat especial [5, 6]. Però el seu plantejament deixava la gravitació fora del camp d'estudi de la teoria. De fet, el mateix Einstein va necessitar onze anys per trobar la manera d'incloure-hi els fenòmens gravitatoris, i això va donar lloc a la relativitat general, presentada el 1916 [7]. Per arribar a aquesta fita va ser necessari, però, que Hermann Minkowski descobrís el 1908 [12] que les transformacions de Lorentz que estan a la base de la relativitat especial són isometries de $\mathbb{R}^4$ respecte a un producte escalar que avui es coneix amb el seu nom. Aquest fet permetia interpretar tots els fenòmens de la relativitat especial des d'un punt de vista geomètric, a $\mathbb{R}^4$. Aprofitant aquest punt de vista, Einstein, que ja s'havia adonat que la força gravitatòria associada a la matèria no és un concepte físic intrínsec, sinó que és fruit d'una elecció particular dels sistemes de coordenades, va ser capaç de formular de manera precisa la teoria que explica el comportament dels camps gravitatoris. Va descobrir que un tal camp no fa altra cosa que deformar la mètrica de l'espai-temps, que deixa de ser la de Minkowski i passa a ser una determinada mètrica de Lorentz. L'equació (en derivades parcials) que relaciona la matèria que crea el camp gravitatori amb aquesta mètrica de Lorentz es coneix amb el nom d'*equació d'Einstein de la gravitació* (equació que substitueix la famosa llei de Newton en el marc de la relativitat).

El lector que desitgi adquirir els coneixements bàsics de la relativitat general té a l'abast una infinitat de llibres i articles. Nosaltres recomanem, per exemple, els següents: [10], [13] i el capítol II de [11]. Malgrat que el llibre [11] que acabem de citar és molt especialitzat, el seu capítol II ofereix una presentació força intuïtiva de la relativitat, tant de l'especial com de la general.

Recordem que una varietat de Lorentz és una varietat pseudoriemanniana (V, g) , on V és una varietat diferenciable de dimensió 4 i g és un camp tensorial diferenciable, covariant, d'ordre 2, simètric, que en cada punt $x \in V$ dona lloc a un producte escalar de $T_x(V)$ (que depèn diferenciablement de x) no singular i d'índex 1. Això vol dir que en cada punt $x \in V$ es pot trobar una base de $T_x(V)$ en la qual la matriu del producte escalar g_x sigui la matriu diagonal $\text{diag}[1, 1, 1, -1]$.

En cada punt $x \in V$ es poden definir els conceptes de *vector temporal*, *vector espacial* i *vector lumínic* de la manera següent: un vector $v \in T_x(V)$ és temporal si $g_x(v, v) < 0$, és espacial si $g_x(v, v) > 0$ i és lumínic si $g_x(v, v) = 0$.

En el context de les varietats de Lorentz, quan usem lletres gregues per designar índexs, suposarem que varien d'1 a 4, i quan usem índexs llatins, suposarem que varien d'1 a 3. Per exemple, un sistema de coordenades (x^1, x^2, x^3, x^4) el podem escriure (x^α) .

En el marc de la relativitat general, la física de qualsevol sistema que actua sota l'acció d'un camp gravitatori es representa sempre en una certa varietat de Lorentz (V, g) , dotada d'una orientació temporal i d'un camp tensorial covariant T , d'ordre 2, simètric, que descriu la matèria responsable del camp gravitatori. Aquest tensor T , que s'anomena *tensor d'impulsió-energia*, està relacionat amb la mètrica de Lorentz g per les equacions (d'Einstein) següents:

$$\begin{cases} \text{Ric}(g) - \frac{1}{2}R(g)g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4}T, \\ \text{div}_g T = 0, \end{cases} \quad (12)$$

on $\text{Ric}(g)$ designa el tensor de Ricci de la mètrica g , $R(g)$ designa la seva curvatura escalar, Λ és una certa constant anomenada *constant cosmològica*, G és la constant de gravitació de Newton i c és la velocitat de la llum.

La constant cosmològica Λ té un valor molt petit que només és significatiu en problemes cosmològics en què intervenen distàncies (de temps o d'espai) molt grans. Malgrat que les ones gravitatòries que estudiarem poden provenir d'estrelles molt llunyanes, nosaltres ens interessarem només pel seu comportament ara i aquí, i en aquest sentit podem suposar sense cap recança que $\Lambda = 0$.

Una altra manera d'escriure la primera equació de (12) en el nostre cas és la següent:

$$\text{Ric}(g) = \chi \left(T - \frac{1}{2}(\text{tr}_g T)g \right), \quad (13)$$

on χ designa la constant $8\pi G/c^4$ i $\text{tr}_g T$ designa la traça de T respecte a la mètrica g . En efecte, la primera equació de (12), amb $\Lambda = 0$, s'escriu en coordenades:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Segui $(g^{\alpha\beta})$ la matriu inversa de $(g_{\alpha\beta})$. Multiplicant la igualtat anterior per $g^{\alpha\beta}$ i sumant respecte a α i β , s'obté

$$R - 2R = \chi \text{tr } T.$$

Per tant, $R = -\chi \text{tr } T$. Substituint aquest valor a la primera equació de (12) (amb $\Lambda = 0$) s'obté (13).

3 Observadors en caiguda lliure: conceptes bàsics

Considerem un observador en caiguda lliure sota l'acció d'un cert camp gravitatori. Hem dit que la física dels fenòmens que s'esdevenen sota l'acció d'aquest camp gravitatori, dintre del marc de la relativitat general, és descrita per una certa varietat de Lorentz (V, g) dotada d'una orientació temporal. La vida d'aquest observador vindrà representada per una certa corba $\gamma(t)$ de V de vector tangent temporal que apunta cap al futur. Se suposa que el paràmetre t és el temps propi de l'observador. Això vol dir que $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = -c^2$ (o també, que la norma de $\dot{\gamma}$ és $\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = ic$). El fet que l'observador estigui en caiguda lliure es tradueix en el fet que la corba $\gamma(t)$ és geodèsica.

En qualsevol instant t_0 del seu temps propi, l'espai de tres dimensions de l'observador és l'espai E_{t_0} ortogonal al vector $\dot{\gamma}(t_0)$ dintre de l'espai tangent $T_{\dot{\gamma}(t_0)}(V)$. Com que en principi aquest espai tangent no està inclòs en la varietat, l'«espai» de l'observador en qualsevol instant tampoc no ho està i, per tant, els seus punts no són esdeveniments físics. Aquest fet pot sorprendre una mica. Però, pensem que quan jo estic parlant amb un amic situat a 1 metre meu, el que jo veig d'ell s'ha esdevingut 3.3×10^{-9} segons abans, i les paraules que ara jo sento han sortit de la seva boca 0.003 segons abans. Com que jo sóc incapaç de detectar aquests intervals tan petits de temps, tinc la sensació que el meu amic està en el meu mateix espai ara mateix, encara que la realitat física del meu amic conversant amb mi és ben diferent, i seria encara més diferent si el meu amic estigués a 2 metres de mi. Tot això és per dir que l'espai de tres dimensions on jo ara (a l'instant $t = t_0$) situo el meu amic és quelcom que no existeix físicament, i que és lògic que el modelitzem com un subespai de l'espai tangent de l'espaitemps en el punt $\gamma(t_0)$, una cosa que no forma part de la varietat on situem els esdeveniments físics. Si volgués considerar que el meu espai de tres dimensions en un instant t_0 del meu temps propi és quelcom on es poden situar els esdeveniments físics que passen en aquell instant, hauria d'identificar d'alguna manera l'espai E_{t_0} amb alguna subvarietat de tres dimensions de V . O, si més no, un cert entorn U_{t_0} de l'origen de E_{t_0} amb alguna subvarietat S_{t_0} de V . La manera de fer això que s'adiu més amb la intuïció és a través de l'aplicació que s'anomena *exponencial geodèsica*, que nosaltres designarem per φ_{t_0} i de la qual recordarem a continuació la definició.

Donat un vector $v \in E_{t_0}$, sigui $\tilde{v}$ el vector unitari $v/\|v\|$, on $\|v\| = \sqrt{g_{Y(t_0)}(v, v)}$. Sigui $s \rightarrow z_{t_0}(s, \tilde{v})$ l'única geodèsica tal que $z_{t_0}(0, \tilde{v}) = Y(t_0)$ i que $\dot{z}_{t_0}(0, \tilde{v}) = \tilde{v}$, on $\dot{z}_{t_0}$ indica el vector tangent en aquell punt. Com que el vector $\tilde{v}$ és unitari, la geodèsica $s \rightarrow z_{t_0}(s, \tilde{v})$ estarà parametritzada per la longitud de l'arc de corba comprès entre $z_{t_0}(0, \tilde{v})$ i $z_{t_0}(s, \tilde{v})$ (això s'abreuja dient que està parametritzada per l'arc). Sigui φ_{t_0} l'aplicació de E_{t_0} a la varietat V que a cada $v \in E_{t_0}$ fa correspondre el punt $z_{t_0}(\|v\|, \tilde{v})$. Com que la geodèsica $s \rightarrow z_{t_0}(s, \tilde{v})$ pot no estar definida per a tot s , l'aplicació φ_{t_0} pot no estar definida sobre tot E_{t_0} , però sí que ho estarà en una certa bola oberta U_{t_0} de E_{t_0} de centre l'origen i radi δ_{t_0} . Posem $S_{t_0} = \varphi_{t_0}(U_{t_0})$. Observeu que si identifiquem els punts de U_{t_0} amb els de S_{t_0} a través de φ_{t_0} , la longitud d'un cert radi de U_{t_0} que uneix l'origen amb un cert v serà igual a la distància geodèsica a S_{t_0} entre $\varphi_{t_0}(v)$ i $Y(t_0)$.

Si considerem un tros finit de la vida de l'observador comprès entre dos instants de temps, $a \leq t \leq b$, es pot demostrar que és possible trobar un sol δ de manera que, per a tot $t \in [a, b]$, φ_t estigui definida sobre la bola oberta U_t de E_t de radi δ (o sigui, un radi comú per a totes les φ_t).

Estem ara en condicions de definir un sistema de coordenades que denominarem *coordenades adaptades a l'observador* i que tradueix geomètricament en el marc de la varietat de Lorentz (V, g) la situació següent:

Suposem que jo vaig dintre d'una nau espacial en caiguda lliure a l'interior de la qual hi ha tres eixos perpendiculars de coordenades, i que jo em trobo a l'origen d'aquests eixos. Mitjançant aquesta referència puc descriure en cada moment la posició de qualsevol objecte dintre de la nau pels quatre números (x^1, x^2, x^3, t) , on els tres primers són les coordenades de l'objecte a l'instant t del meu temps propi.

Com es tradueix aquesta situació en el marc geomètric de la varietat (V, g) , tenint en compte que els eixos no poden estar a la varietat sinó als espais tangents en els diversos punts corresponents als diversos instants de la meua vida?

La meua vida és descrita per una geodèsica $\gamma(t)$ de V de vector tangent temporal que apunta cap al futur, corba que suposo parametritzada pel meu temps propi. Els tres eixos que viatgen amb mi donaran lloc a tres camps vectorials $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ sobre la corba $\gamma(t)$. El fet que els tres eixos estiguin quietes, sense girar durant el viatge, es modelitza imposant que són paral·lels al llarg de la corba, és a dir, $\nabla_{\dot{\gamma}} e_i = 0$. En relació amb això, cal tenir en compte que si fixem un instant t_0 i fixem tres vectors e_1, e_2, e_3 de $E_{t_0} = \langle \dot{\gamma}(t_0) \rangle^\perp$ que formin una base ortonormal, existeixen uns únics camps $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ sobre la corba, paral·lels, que per a $t = t_0$ coincideixen amb els vectors e_1, e_2, e_3 donats. Pel fet de ser paral·lels pertanyeran a E_t i seran base ortonormal d'aquest espai per a tot t .

Fixats dos instants a i b del meu temps, amb $a < b$, sigui δ un número positiu tal que, per a tot $t \in [a, b]$, φ_t estigui definida sobre la bola oberta U_t de E_t de radi δ . Siguin a' i b' dos altres números tals que $a < a' < b' < b$ (puc

pensar que a' és proper a a i b' proper a b). Sigui U la bola oberta de $\mathbb{R}^3$ de radi δ i centre l'origen. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}^4 \\ & \cup \\ \psi: \quad & U \times (a', b') \rightarrow V \\ & (x^1, x^2, x^3, t) \rightarrow \varphi_t(\sum_{i=1}^3 x^i e_i(t)), \end{aligned} \quad (14)$$

la qual donarà lloc a una carta local $(\psi(U \times (a', b')), \psi^{-1})$.

En el sistema de coordenades corresponent a aquesta carta, l'observador $\gamma(t)$ té coordenades $(0, 0, 0, t)$ per a tot t ; les subvarietats S_t (que hem identificat amb l'«espai» de l'observador a l'instant t) són les llesques horitzontals $t = \text{constant}$; la matriu de $g_{\gamma(t)}$ és $\text{diag}[1, 1, 1, -c^2]$; la geodèsica que uneix qualsevol punt $p = (p^1, p^2, p^3, t) \in S_t$ amb $\gamma(t) = (0, 0, 0, t)$ està determinada paramètricament per $s \rightarrow (\frac{sp^1}{\|p\|}, \frac{sp^2}{\|p\|}, \frac{sp^3}{\|p\|}, t)$, amb $\|p\| = \sqrt{\sum_i (p^i)^2}$; i, finalment, la distància geodèsica entre $p \in S_t$ i $\gamma(t)$ és $\|p\|$.

4 Acceleració que un observador en caiguda lliure atribueix a un altre observador en caiguda lliure

Considerem ara dos observadors A i B pròxims l'un de l'altre i en caiguda lliure. Siguin γ_A i γ_B les dues corbes de V que representen les seves vides. A la figura 1 es dibuixen aquestes corbes, juntament amb els espais (de tres dimensions) del primer observador, S_{t_1} , S_{t_2} , S_{t_3} , en tres instants del seu temps propi (considerats com a subvarietats de V pel procediment explicat a la secció anterior). Observeu que S_{t_1} , S_{t_2} , S_{t_3} són perpendiculars a la corba $\gamma_A(t)$ del primer observador, però no ho són a la corba $\gamma_B(t)$ del segon. En el dibuix es posa de manifest que l'observador A veurà que B va canviant de posició a l'espai (a l'espai de tres dimensions de A) i li atribuirà una acceleració que ens proposem calcular a continuació. Remarquem abans, però, que cada un d'aquests dos observadors està en caiguda lliure i cap d'ells no nota que sobre ell actui cap força. Tanmateix, veurem que A atribuirà a B una certa acceleració.

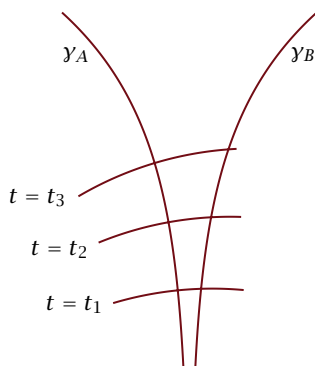


FIGURA 1

Fixem un instant de temps $t = t_0$ de l'observador A . Com que volem estudiar la posició relativa de B respecte a A en els instants propers a t_0 , per simplificar-ho farem un canvi d'origen en el temps de l'observador A de manera que l'instant que hem fixat passi a ser l'origen de temps $t = 0$. Provarem el lema següent:

LEMA 7. *Existeix un número real positiu ε tal que si B és un observador en caiguda lliure tal que la geodèsica $\tau \rightarrow y_B(\tau)$ talla S_0 en un punt a distància geodèsica de $y_A(0)$ menor que ε , llavors existeix una variació*

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \\ (s, \tau) \rightarrow \alpha(s, \tau),$$

que compleix:

- 1) $\alpha(0, \tau) = y_A(\tau)$.
- 2) Les corbes $\tau \rightarrow \alpha(s, \tau)$ són geodèsiques de vector tangent de norma ic en tot punt.
- 3) Per a un cert valor s_B de s es compleix $\alpha(s_B, \tau) = y_B(\tau)$.
- 4) $s \rightarrow \alpha(s, 0)$ és la geodèsica de S_0 que dona la distància mínima a $y_A(0)$.
- 5) El camp $\frac{\partial}{\partial s}$ de la variació α és perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ sobre la corba $\tau \rightarrow \alpha(0, \tau) = y_A(\tau)$.

Aquest lema ens assegura que tot observador B en caiguda lliure pròxim a A en un cert instant $t = 0$ del temps de A forma part d'una família α_s d'observadors en caiguda lliure parametritzada per un paràmetre $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de la qual formen part A (per a $s = 0$) i B (per a $s = s_B$).

Deixarem la prova del lema per al final d'aquesta secció i ara, utilitzant-lo, calcularem l'acceleració que A atribuirà a B a l'instant $t = 0$ del seu temps. La posició que A atribuirà a B a l'instant t serà el punt p_t intersecció de la geodèsica $\tau \rightarrow \alpha(s_B, \tau)$ amb S_t . Sigui $\xi_t \in \langle \dot{y}_A(t) \rangle^\perp \subset T_{y_A(t)}(V)$ el vector tal que $\varphi_t(\xi_t) = p_t$. El vector posició que A atribuirà a B a l'instant t serà ξ_t . Per tant, l'acceleració que A atribuirà a B a l'instant $t = 0$ serà $\nabla_{\dot{y}_A(0)} \nabla_{\dot{y}_A(t)} \xi_t$.

En el sistema de coordenades (14) adaptat a l'observador A , tindrem

$$\alpha^\lambda(s, \tau) \approx \alpha^\lambda(0, \tau) + \frac{\partial \alpha^\lambda(0, \tau)}{\partial s} s, \quad \lambda = 1, \dots, 4,$$

on el símbol $\approx$ indica igualtat llevat de termes d'ordre > 1 en s . Com que el vector $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{s=0}$ és perpendicular a $\dot{y}_A(\tau)$ per a qualsevol τ , la quarta coordenada de $\frac{\partial \alpha^\lambda(0, \tau)}{\partial s}$ serà nul·la. Com que, d'altra banda, $\alpha(0, \tau) = y_A(\tau)$, tindrem

$$\alpha(s, \tau) \approx \left(\frac{\partial \alpha^1(0, \tau)}{\partial s} s, \frac{\partial \alpha^2(0, \tau)}{\partial s} s, \frac{\partial \alpha^3(0, \tau)}{\partial s} s, \tau \right). \quad (15)$$

El punt p_t intersecció de la geodèsica $\tau \rightarrow \alpha(s_B, \tau)$ amb S_t és

$$p_t \approx \left(\frac{\partial \alpha^1(0, t)}{\partial s} s, \frac{\partial \alpha^2(0, t)}{\partial s} s, \frac{\partial \alpha^3(0, t)}{\partial s} s, t \right)$$

(aclarim aquí que hem designat per τ el temps propi dels observadors $\tau \rightarrow \alpha(s, \tau)$ per a tot s , i per t el temps de l'observador A . És a dir, que $\tau = t$ quan $s = 0$). El vector ξ_t serà, doncs, aproximadament igual a $s_B \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_{(0,t)}$. Com que la variació α és per geodèsiques, el vector $\left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_{(0,t)}$ és un camp de Jacobi sobre la geodèsica γ_A , i pel teorema 3

$$\nabla_{\dot{\gamma}_A(0)} \nabla_{\dot{\gamma}_A(t)} \xi_t \approx R(\dot{\gamma}_A(0), \xi_0) \dot{\gamma}_A(0).$$

Resumim a continuació en el teorema següent les conclusions a què hem arribat:

TEOREMA 8. *Sigui A un observador en caiguda lliure i sigui $\gamma_A(t)$ la geodèsica que representa la seva vida. Sigui B un altre observador en caiguda lliure que durant un cert període de temps està suficientment a prop de A perquè aquest li pugui mesurar la seva posició. Sigui ξ_t el vector posició que A atribueix a B (vector que depèn de t). L'acceleració que A atribuirà a B és $R(\dot{\gamma}_A, \xi) \dot{\gamma}_A$, on R indica aquí el tensor de curvatura de (V, g) .*

Donem a continuació la prova del lema.

PROVA DEL LEMA 7. Considerem una carta local adaptada a l'observador A donada per una ψ de la forma (14) tal que $0 \in (a', b')$. Suposem que la corba $\gamma_B(\tau)$ intercepta la subvarietat S_0 d'equació $t = 0$ en un cert punt p . Fem un canvi d'origen en el temps propi τ de B de manera que el punt p correspongui a $\tau = 0$. En les coordenades de la carta local que hem pres, la geodèsica $a(s)$ de S_0 que uneix p amb $\gamma_A(0)$ serà $a(s) = \left(\frac{sp^1}{\|p\|}, \frac{sp^2}{\|p\|}, \frac{sp^3}{\|p\|}, 0 \right)$, amb $\|p\| = \sqrt{\sum_i (p^i)^2}$. Els espais tangents $T_{a(s)}(V)$ en els diversos punts $a(s)$ de la geodèsica $a(s)$ estan tots continguts en una varietat comuna, que és el fibrat tangent $T(V)$. Sigui $s \rightarrow b(s) \in T(V)$ una corba diferenciable de $T(V)$ que compleixi: 1) $b(s) \in T_{a(s)}(V)$ per a tot s ; 2) $b(0) = \dot{\gamma}_A(0)$; 3) $b(\|p\|) = \dot{\gamma}_B(0)$; 4) tots els $b(s)$ són temporals i tenen norma ic, és a dir, $g_{a(s)}(b(s), b(s)) = -c^2$. Com que els $b(s)$ són temporals i per a $s = 0$ el vector $b(0) = \dot{\gamma}_A(0)$ apunta cap al futur, apuntaran cap al futur per a tot s . Sigui $\tau \rightarrow \gamma_s(\tau)$ l'única geodèsica tal que $\gamma_s(0) = a(s)$ i $\dot{\gamma}_s(0) = b(s)$. Cada geodèsica $\tau \rightarrow \gamma_s(\tau)$ en principi només estarà definida en un cert interval $-\varepsilon_s < \tau < \varepsilon_s$ que depèn de s , però el teorema d'existència, unicitat i dependència diferenciable de les condicions inicials de l'equació de les geodèsiques ens assegura que existeix un ε tal que $\tau \rightarrow \gamma_s(\tau)$ està definit per a tot $(s, \tau) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definim llavors la variació α posant $\alpha(s, \tau) = \gamma_s(\tau)$.

Aquesta variació α , per construcció, és una variació per geodèsiques de γ_A tal que per a $s = |p|$ s'obté γ_B . Designem per s_B aquest valor de s (és a dir, $s_B = |p|$). El camp transvers $\frac{\partial}{\partial s}$ d'aquesta variació és perpendicular per construcció a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ per a $s = 0$ i $\tau = 0$. Provem que això implica que $\frac{\partial}{\partial s}$ és perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ per a $s = 0$,

qualsevol que sigui τ . En efecte, com que $g(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}) = c^2$, la seva derivada respecte a s és nul·la. Per tant,

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right).$$

O sigui que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \tau}$ és sempre perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \tau}$. D'altra banda,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial \tau}\right).$$

Però $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \tau}$ perquè les derivades parcials commuten, per tant, el primer terme del segon membre de la igualtat anterior és nul i el segon terme, també, perquè $\tau \rightarrow \alpha(s, \tau)$ són geodèsiques per a tot s . Per tant, el producte escalar de $\frac{\partial}{\partial s}$ i $\frac{\partial}{\partial \tau}$ no depèn de τ . Com que per a $s = 0$ i $\tau = 0$ s'anul·la, també s'anul·larà per a $s = 0$ i qualsevol τ . $\square$

5 Equació d'Einstein per a petites pertorbacions de la mètrica de Minkowski

Sortosament nosaltres vivim en una regió on els camps gravitatoris són molt petits des del punt de vista relativista. Si no hi haguessin camps gravitatoris, la física seria descrita per la relativitat especial, que des del punt de vista geomètric es modela a l'espai de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$, on η designa la mètrica que en la base canònica de $\mathbb{R}^4$ té per matriu la matriu diagonal $\eta = \text{diag}[1, 1, 1, -c^2]$. Estudiarem el cas d'un camp gravitatori creat per una matèria amb tensor d'impulsió-energia T petit i derivades de T petites, i suposarem que la mètrica de Lorentz g' a $\mathbb{R}^4$ associada al camp gravitatori és una pertorbació petita de la mètrica de Minkowski. És a dir, $g' = \eta + h$, amb h petit i derivades de h petites. L'equació d'Einstein (13) s'escriurà:

$$\text{Ric}(g') = \chi \left(T - \frac{1}{2} (\text{tr}_{g'} T) g' \right).$$

Com que $g' = \eta + h$, i tenint en compte la fórmula (8) que ens dona de manera aproximada la matriu $(g'^{\alpha\beta})$, tindrem

$$\begin{aligned} (\text{tr}_{g'} T) g' &= (g'^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}) g' \approx \\ &\approx ((\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) T_{\alpha\beta}) (\eta + h) \approx (\eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}) \eta = (\text{tr}_{\eta} T) \eta, \end{aligned}$$

on hem suprimit (per petits) els termes que porten productes de h i T o producte de dues h .

Per tant, l'equació d'Einstein s'escriu de manera aproximada:

$$\text{Ric}(\eta + h) \approx \chi \left(T - \frac{1}{2} (\text{tr}_{\eta} T) \eta \right). \quad (16)$$

Sigui $D(h)$ el 2-tensor covariant a $\mathbb{R}^4$ donat per

$$D(h)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(\nabla_\lambda\nabla_\beta h_{\alpha\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\alpha h_{\mu\beta} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_{\beta\alpha}) - \frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha \text{tr } h,$$

on ∇ indica la derivada covariant associada a la mètrica inicial (que en aquest cas és la de Minkowski).

En virtut de la fórmula (11) es té

$$\text{Ric}(\eta + h) \approx \text{Ric}(\eta) + D(h).$$

Com que el tensor de Ricci de η és nul, l'equació (16) s'escriu de manera aproximada

$$D(h) \approx \chi \left(T - \frac{1}{2}(\text{tr}_\eta T)\eta \right). \quad (17)$$

Aquesta equació, tot i ser aproximada, encara és massa complicada. Per tal de simplificar-la, en comptes de considerar totes les mètriques de Lorentz de la forma $g' = \eta + h$ amb h petit, ens limitarem només a aquelles mètriques $g' = \eta + h$ tals que h (a més de ser petit) compleix la condició suplementària

$$\text{div } h = \frac{1}{2}d \text{tr } h, \quad (18)$$

on d indica la diferencial exterior. Aquesta condició s'escriu en components:

$$\nabla^\mu h_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha \text{tr } h.$$

Tenint en compte que les derivades covariants associades a la mètrica de Minkowski són les derivades ordinàries i que ∇_α commuta amb ∇_β , es veu trivialment que per a les h que compleixen la condició (18) hom té

$$D(h)_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla_\mu h_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}\square h_{\beta\alpha},$$

on l'operador $\square$ és l'operador de d'Alembert que actua sobre les funcions f de $\mathbb{R}^4$ així:

$$\square f = \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Per tant, per a les h que compleixen (18), l'equació (17) s'escriu:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\alpha\beta} = \chi S_{\alpha\beta}, \quad (19)$$

on S designa el tensor $T - (1/2)(\text{tr}_\eta T)\eta$ que apareix al segon membre de (17). Observeu que en les regions de $\mathbb{R}^4$ on el tensor T s'anul·la (on no hi ha matèria), també S s'anul·la i en aquestes regions l'equació d'Einstein s'escriu de manera aproximada:

$$\square h_{\alpha\beta} = 0,$$

que és l'equació d'ona per a cada una de les 10 components $h_{\alpha\beta}$ de h .

Resumint: l'equació d'Einstein aproximada corresponent a una mètrica $g' = \eta + h$ i a un tensor d'impulsió-energia T (amb T i h petits) és (17). Ara bé, per a les mètriques g' que provenen d'un h que compleix (18), l'equació d'Einstein aproximada es pot escriure de la forma més senzilla (19). Cal, doncs, preguntar-nos per la significació física de la condició (18). Per fer això cal estudiar l'acció dels difeomorfismes pròxims a la identitat sobre l'equació (17).

6 Acció de difeomorfismes pròxims a la identitat sobre les mètriques

La pràctica totalitat dels llibres clàssics de relativitat, en arribar a aquest punt, fan uns càlculs senzills en coordenades per explicar que la condició (18) és irrellevant des del punt de vista físic, càlculs que amaguen una mica que aquest fet involucra difeomorfismes de la varietat pròxims a la identitat i derivades de Lie respecte als camps que parametritzen aquests difeomorfismes. Per posar de manifest tot això de manera clara convé considerar un marc una mica més general que el de l'apartat anterior. Situem-nos en el context d'una varietat de Lorentz (V, g) per a la qual existeix una mètrica de Riemann γ tal que la varietat de Riemann (V, γ) és completa. En aquesta situació, podem parametritzar els difeomorfismes de V pròxims a la identitat pels camps vectorials ξ pròxims a zero a través de l'exponencial geodèsica de γ , tal com explicarem a continuació.

Donat un camp vectorial ξ , dissenyem per f_ξ el difeomorfisme

$$\begin{aligned} f_\xi: V &\rightarrow V \\ x &\rightarrow z(x, 1, \xi), \end{aligned}$$

on $t \rightarrow z(x, t, \xi)$ indica l'única geodèsica de la varietat de Riemann (V, γ) tal que $z(x, 0, \xi) = x$ i $\dot{z}(x, 0, \xi) = \xi$. Sigui $g' = g + h$ una mètrica de Lorentz pròxima a g . Posem per $g' \circ f_\xi = (f_\xi^{-1})^* g'$. Dissenyem per ∇' la derivada covariant associada a la mètrica g' i per ∇ la derivada covariant associada a g . Si la mètrica g' és de la forma $g' = g + h$ amb h petit, la mètrica $g' \circ f_\xi$ quan ξ és petit també serà pròxima a g i, per tant, serà de la forma $g' \circ f_\xi = g + h_\xi$ amb h_ξ petit. La proposició següent descriu la relació entre h_ξ i h :

PROPOSICIÓ 9. *Es compleix*

$$h_\xi \approx h - L_\xi g,$$

i en qualsevol carta local això es pot escriure

$$(h_\xi)_{\alpha\beta} \approx h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha.$$

PROVA. Aplicant la fórmula de Taylor a la corba $t \rightarrow z(x, t, \xi)$, obtenim:

$$z^\alpha(x, 1, \xi) = z^\alpha(x, 0, \xi) + \dot{z}^\alpha(x, 0, \xi)(1 - 0) + \dots$$

Això dona

$$f_{\xi}^{\alpha}(x) = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x) + T^{\alpha}(\xi), \quad (20)$$

on $T(\xi)$ indica un terme d'ordre > 1 en ξ .

L'expressió (20) ens permet calcular el jacobià

$$\frac{\partial f_{\xi}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \dots$$

El jacobià del difeomorfisme invers serà

$$\frac{\partial (f_{\xi}^{-1})^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \dots \quad (21)$$

Com que

$$((f_{\xi}^{-1})^*(g'))_x \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right) = g'_{f_{\xi}^{-1}(x)} \left((f_{\xi}^{-1})^* \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, (f_{\xi}^{-1})^* \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right),$$

tenint en compte l'expressió (21) del jacobià del difeomorfisme invers, tindrem

$$(g' \circ f_{\xi})_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(f_{\xi}^{-1}(x)) - (\partial_{\alpha}\xi^{\lambda})g'_{\lambda\beta}(f_{\xi}^{-1}(x)) - (\partial_{\beta}\xi^{\lambda})g'_{\alpha\lambda}(f_{\xi}^{-1}(x)) + \dots, \quad (22)$$

on ∂_{α} designa, com sempre, $\partial/\partial x^{\alpha}$.

Ara bé, per la fórmula de Taylor resulta

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(f_{\xi}^{-1}(x)) &= g'_{\alpha\beta}(x) + \sum_{\lambda} (f_{\xi}^{-1}(x)^{\lambda} - x^{\lambda}) \partial_{\lambda} g'_{\alpha\beta} + \dots = \\ &= g'_{\alpha\beta}(x) + \sum_{\lambda} ((x^{\lambda} - \xi^{\lambda}) - x^{\lambda}) \partial_{\lambda} g'_{\alpha\beta} + \dots \end{aligned}$$

Això s'escriu com

$$g'_{\alpha\beta}(f_{\xi}^{-1}(x)) = g'_{\alpha\beta}(x) - \xi(g'_{\alpha\beta}) + \dots,$$

on $\xi(g'_{\alpha\beta})$ indica el camp ξ actuant (com a derivació) sobre la funció $g'_{\alpha\beta}$.

Substituint aquesta expressió a (22) s'obté

$$(g' \circ f_{\xi})_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(x) - \xi(g'_{\alpha\beta}) - (\partial_{\alpha}\xi^{\lambda})g'_{\lambda\beta}(x) - (\partial_{\beta}\xi^{\lambda})g'_{\alpha\lambda}(x) + \dots \quad (23)$$

Ara bé, els termes $-(\partial_{\alpha}\xi^{\lambda})g'_{\lambda\beta}(x) - (\partial_{\beta}\xi^{\lambda})g'_{\alpha\lambda}(x)$ de l'expressió anterior es poden escriure com

$$g' \left(\left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \right], \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right) + g' \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right] \right).$$

Substituint això a (23) i tenint en compte l'expressió (2) de la derivada de Lie, obtenim

$$(g' \circ f_\xi)_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(x) - (L_\xi g')_{\alpha\beta}(x) + \dots \quad (24)$$

Utilitzant la notació de la subsecció 1.2.3, tindrem

$$\nabla'_{\partial/\partial x^\alpha} \xi = \nabla_{\partial/\partial x^\alpha} \xi + Q(\partial/\partial x^\alpha, \xi) = \nabla_{\partial/\partial x^\alpha} \xi + Q_{\alpha\beta} \xi^\beta.$$

Ara bé, els termes $Q_{\alpha\beta} \xi^\beta$ contenen productes de h i de ξ (ambdós petits). Seran, per tant, negligibles i (24) s'escriurà

$$\begin{aligned} (g' \circ f_\xi)_{\alpha\beta} &\approx g'_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha \xi^\lambda) g'_{\lambda\beta} - (\nabla_\beta \xi^\lambda) g'_{\alpha\lambda} = \\ &= g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha \xi^\lambda) (g_{\lambda\beta} + h_{\lambda\beta}) - (\nabla_\beta \xi^\lambda) (g_{\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda}) \approx \\ &\approx g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha \xi^\lambda) g_{\lambda\beta} - (\nabla_\beta \xi^\lambda) g_{\alpha\lambda} = \\ &= g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha. \end{aligned}$$

Això prova la proposició. □

7 Elecció d'una referència convenient per a l'equació de gravitació

Tornem-nos a situar en el marc de la secció 5. Estàvem a $\mathbb{R}^4$ amb la mètrica η de Minkowski. L'equació d'Einstein aproximada corresponent a una mètrica $g' = \eta + h$ i a un tensor d'impulsió-energia T (amb T i h petits) era (17). Per a les mètriques g' que provenien d'un h que complia (18), l'equació d'Einstein aproximada es podia escriure de la forma més senzilla (19). En aquesta situació establim el teorema següent:

TEOREMA 10. *Si h és solució de*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \square h_{\alpha\beta} \approx \chi S_{\alpha\beta} \\ \nabla^\rho h_{\rho\alpha} \approx \frac{1}{2} \nabla_\alpha \text{tr } h, \end{cases} \quad (25)$$

llavors h és solució de l'equació d'Einstein aproximada (17). D'altra banda, si h és solució de l'equació d'Einstein aproximada (17), llavors es pot trobar un difeomorfisme f_ξ pròxim a la identitat (difeomorfisme associat a un camp ξ) tal que si posem $(f_\xi^{-1})^(\eta + h) = \eta + h_\xi$, aleshores h_ξ sigui solució de (25).*

Dit de manera menys precisa: les equacions aproximades (25) són equivalents a l'equació aproximada d'Einstein (17).

Del fet d'escollir un difeomorfisme adequat perquè es compleixi la segona equació aproximada de (25) els físics en diuen escollir una *gauge*. Nosaltres traduirem el mot anglès *gauge* (emprat arreu) per *referència*.

PROVA. La primera implicació ja l'hem demostrat a la secció 5. Per demostrar la segona vegem en primer lloc que l'equació (17) és invariant per l'acció de difeomorfismes infinitesimals. És a dir, quan s'aplica un difeomorfisme infinitesimal a aquella equació s'obté *exactament* la mateixa equació. Comencem pel primer membre de (17). Vegem, amb la notació de l'apartat anterior, que si ξ és un camp vectorial es té $D(h)=D(h_\xi)$. En efecte, de la definició de $D(h)$ hom té

$$D(h_\xi)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(\nabla_\lambda\nabla_\beta(h_\xi)_{\alpha\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\alpha(h_\xi)_{\mu\beta} - \nabla_\lambda\nabla_\mu(h_\xi)_{\beta\alpha}) - \frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha \operatorname{tr} h_\xi.$$

Substituint aquí h_ξ per l'expressió $(h_\xi)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\xi_\beta - \nabla_\beta\xi_\alpha$ donada per la proposició 9, s'obté per un càlcul senzill que $D(h_\xi)=D(h)$.

Naturalment, si el primer membre de (17) és invariant per l'acció d'un difeomorfisme infinitesimal, el segon membre, també. De totes maneres això es pot veure directament de la manera que explicarem tot seguit.

Recordem que havíem designat per $S = T - (1/2)(\operatorname{tr}_\eta T)\eta$. Els mateixos càlculs que hem fet per establir la fórmula (24) ens portarien a l'expressió

$$(S \circ f_\xi) = S - L_\xi S + \dots$$

En virtut de (2), tindrem

$$(L_\xi S)_{\alpha\beta} = \xi(S_{\alpha\beta}) - S\left(\left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right], \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) - S\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right]\right).$$

En cada un d'aquests termes, hi intervenen productes de ξ i de S , ambdós petits. Per tant, $L_\xi S \approx 0$ i $(S \circ f_\xi) \approx S$.

El segon pas que farem és veure que, donada una mètrica $g' = \eta + h$ pròxima a η , podem trobar un camp vectorial ξ per al qual la mètrica $g' \circ f_\xi = \eta + h_\xi$ compleixi la condició (18), que s'escriu

$$\nabla^\rho(h_\xi)_{\rho\alpha} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} h_\xi. \quad (26)$$

Com que $(h_\xi)_{\alpha\rho} = h_{\alpha\rho} - \nabla_\alpha\xi_\rho - \nabla_\rho\xi_\alpha$, el primer membre de (26) esdevé

$$\nabla^\rho(h_\xi)_{\rho\alpha} = \nabla^\rho h_{\rho\alpha} - \nabla_\alpha \operatorname{div} \xi - \square\xi_\alpha.$$

Per altra banda, $\operatorname{tr} h_\xi = \operatorname{tr} h - 2 \operatorname{div} \xi$. Per tant (26) s'escriu, finalment

$$\square\xi_\alpha = \nabla^\rho h_{\rho\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} h. \quad (27)$$

Això, per a h donat, és una equació en ξ que té infinites solucions depenent de les condicions inicials que s'imposin a ξ . Qualsevol d'aquestes solucions ens dona un difeomorfisme infinitesimal com el que busquem.

Prenguem ara h que sigui solució de l'equació d'Einstein aproximada (17). Pel procediment que acabem d'indicar trobem un camp ξ tal que el h_ξ corresponent compleixi la segona equació aproximada de (25). Com que l'equació (17) és invariant per l'acció de difeomorfismes infinitesimals i h era solució de (17), h_ξ també ho serà. Per tant, h_ξ serà solució de la primera equació de (25). $\square$

Més endavant necessitarem el lema tècnic següent relacionat amb l'afirmació de la segona part del teorema anterior.

LEMA 11. *Si h és solució de l'equació d'Einstein aproximada (17), si ξ és un camp vectorial tal que h_ξ és solució de (25) i si ζ és qualsevol camp que compleix $\square\zeta_\alpha = 0$, llavors el camp $\xi' = \xi + \zeta$ és tal que $h_{\xi'}$ també és solució de (25).*

PROVA. A la demostració de la segona part del teorema 10 havíem pres com a camp ξ qualsevol camp que fos solució de (27). Naturalment, si ξ és solució de (27) i ζ compleix $\square\zeta_\alpha = 0$, el camp $\xi' = \xi + \zeta$ també és solució de (27). $\square$

Einstein va donar solucions explícites de les equacions (25) en els articles [8] i [9]. Per veure com es poden resoldre, diguem que és ben conegut que en mecànica clàssica el potencial gravitatori (a $\mathbb{R}^3$) produït per una matèria amb densitat $\rho(x)$ ve donat per

$$V(x) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy,$$

i que això correspon a la solució de l'equació de Poisson

$$\Delta V = 4\pi G\rho$$

que s'anulla a l'infinit.

De manera anàloga, es pot demostrar que a $\mathbb{R}^4$ la solució de

$$\square V = 4\pi G\rho$$

que per a cada t s'anulla a l'infinit de $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ és el potencial

$$V(x, t) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y, t \pm \frac{1}{c}|x - y|)}{|x - y|} dy.$$

Per tant, les $h_{\alpha\beta}$ solucions de (25) que busquem són

$$h_{\alpha\beta}(x, t) = \frac{\chi}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{S_{\alpha\beta}(y, t - \frac{1}{c}|x - y|)}{|x - y|} dy. \quad (28)$$

Ara bé, cal preguntar-nos si aquestes $h_{\alpha\beta}$ compleixen també la segona equació de (25). Veurem que sí. En efecte, sabem que el tensor T d'impulsió-energia té divergència nul·la. Això porta com a conseqüència que el tensor $S = T - (1/2)(\text{tr}_\eta T)\eta$ compleix la condició

$$\nabla^\rho S_{\rho\alpha} = \frac{1}{2} \nabla_\alpha \text{tr} S.$$

Utilitzant aquesta condició es pot veure que les solucions $h_{\alpha\beta}$ donades per (28) compleixen automàticament la segona equació de (25).

8 Què entenem per *ona gravitatòria*

Ja hem dit al començament de la secció 5 que sortosament nosaltres vivim en una regió on els camps gravitatoris són molt petits des del punt de vista relativista i que la física del nostre entorn és modelada per pertorbacions petites de la mètrica de Minkowski $\eta + h$; i si el nostre entorn és el buit, ara i aquí el tensor h , llevat d'un cert difeomorfisme de $\mathbb{R}^4$, complirà l'equació d'ona $\square h_{\alpha\beta} = 0$. Estaríem, doncs, temptats de dir que una ona gravitatòria és una pertorbació petita de la mètrica de Minkowski η de manera que es pot trobar un cert difeomorfisme de $\mathbb{R}^4$ tal que aquesta pertorbació s'expressa com $\eta + h$, amb el tensor h que compleix l'equació d'ona $\square h_{\alpha\beta} = 0$. Ara bé, si les components $h_{\alpha\beta}$ no depenguessin del temps, la pertorbació corresponent de la mètrica de Minkowski podria considerar-se una ona gravitatòria? Evidentment que no, perquè la idea intuïtiva que tenim d'ona està associada a alguna cosa que varia amb el temps.

Si les $h_{\alpha\beta}$ no depenen del temps, l'equació d'ona $\square h_{\alpha\beta} = 0$ esdevé l'equació de Laplace

$$\Delta h_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial (x^i)^2} = 0$$

perquè $\partial^2 h_{\alpha\beta} / \partial t^2 = 0$. Aquest és el cas del camp gravitatori produït per qualsevol estrella esfèrica (en particular, pel Sol), camp estàtic que no dóna lloc a cap ona gravitacional. Vegem amb detall com són les $h_{\alpha\beta}$ en aquesta situació.

És ben conegut que la mètrica de $\mathbb{R}^4$ associada al camp gravitatori d'una estrella esfèrica és la de Schwarzschild,

$$g = \left(\frac{1}{1 - \frac{k}{r}} \right) dr^2 + r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2) - c^2 \left(1 - \frac{k}{r} \right) dt^2,$$

amb $k = 2Gm/c^2$, on m és la massa de l'estrella i G és la constant de gravitació de Newton (r , φ i θ són coordenades esfèriques de $\mathbb{R}^3$, amb φ designant la colatitud i θ la longitud). Quan $m = 0$, l'expressió anterior coincideix amb la mètrica de Minkowski. Sigui $h = g - \eta$. Les úniques components no nul·les de h són les següents: $h_{rr} = \frac{k}{k-r}$ i $h_{tt} = \frac{c^2 k}{r}$. Si ens cenyim a la teoria linealitzada i no pas a la de les solucions exactes, tenim

$$h_{rr} = \frac{k}{k-r} = \frac{k/r}{k/r - 1} = -\frac{k}{r} \frac{1}{1 - k/r} \approx -\frac{k}{r} \left(1 + \frac{k}{r} \right) \approx -\frac{k}{r}, \quad h_{tt} = \frac{c^2 k}{r}.$$

Es pot veure que l'operador de d'Alembert $\square$ en les coordenades (r, φ, θ, t) s'expressa

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Les nostres $h_{\alpha\beta}$ no nul·les només depenen de r i són, llevat d'una constant multiplicativa, el potencial clàssic $1/r$. Compleixen $\square h_{\alpha\beta} = \Delta h_{\alpha\beta} = 0$.

9 Ones gravitacionals monocromàtiques, planes

Les ones que ens arriben procedents d'alguna estrella llunyana podem considerar que són ones planes. Per tant, tenint present l'exemple de la subsecció 1.1, estudiarem ones de la forma

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \operatorname{Re}(e^{i(k_1x^1+k_2x^2+k_3x^3-\omega t)}), \quad (29)$$

on $A_{\alpha\beta}$ són constants reals que formen una matriu simètrica i $\operatorname{Re}(\)$ designa la part real del que hi ha entre parèntesis. D'ara endavant, per comoditat, ometrem l'escriptura de $\operatorname{Re}(\)$ i la sobreentendrem. Les ones h de la forma (29) no són pas totes les que compleixen l'equació d'Einstein aproximada (en el buit), però sí que qualsevol solució no estàtica d'aquesta equació pot ser expressada per superposició de Fourier d'ones de la forma (29).

En l'expressió (29) s'utilitzen les coordenades (x^1, x^2, x^3, t) de l'espai de Minkowski, en les quals la mètrica s'expressa com $\operatorname{diag}[1, 1, 1, -c^2]$. Posem $x^4 = ct$ i usem les coordenades (x^1, x^2, x^3, x^4) en les quals la mètrica té l'expressió $\operatorname{diag}[1, 1, 1, -1]$. Com que $t = x^4/c$, si posem $k_4 = -\omega/c$, l'ona (29) s'expressarà per

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{k_\nu x^\nu}, \quad (30)$$

on hem omès $\operatorname{Re}(\)$ perquè ho sobreentenem.

No cal dir que a l'espai de Minkowski identifiquem 1-formes i vectors a través de la mètrica i que k pensada com 1-forma té components (k_ν) amb $k_4 = -\omega/c$, mentre que la mateixa k pensada com a vector té components (k^ν) amb $k^4 = \omega/c$.

És immediat veure que la condició que les $h_{\alpha\beta}$ de (30) compleixin $\square h_{\alpha\beta} = 0$ equival al fet que k compleixi $k_\lambda^\lambda = 0$ (o sigui, $\eta(k, k) = 0$, pensant k com a vector). També és immediat veure que la condició $\operatorname{div} h = \frac{1}{2} d \operatorname{tr} h$ equival al fet que la matriu $A = (A_{\alpha\beta})$ compleixi $A_{\mu\beta} k^\mu = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} A) k_\beta$. Per tant, s'haurà de complir

$$k_\lambda k^\lambda = 0, \quad A_{\mu\beta} k^\mu = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} A) k_\beta. \quad (31)$$

Analitzem la primera d'aquestes dues condicions. Recordem que a la subsecció 1.1 definíem el vector d'ona com el vector $\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$ donat per $\vec{k} = (\omega/\nu)\vec{n}$, on $\vec{n}$ era el vector unitari en la direcció de propagació de l'ona. D'aquí es desprèn que la norma de $\vec{k}$ compleix $|\vec{k}| = \omega/\nu$. En aquesta secció hem afegit, però, una quarta component a k i l'hem considerat com un vector de l'espai de Minkowski. Recordem que $k^4 = \omega/c$ i $k_4 = -\omega/c$. Així, doncs, tindrem $k_\lambda k^\lambda = k_i k^i + k_4 k^4$ (l'índex i varia d'1 a 3). Per tant, $k_\lambda k^\lambda = (\omega/\nu)^2 - (\omega/c)^2$. Veiem, doncs, que la condició $k_\lambda k^\lambda = 0$ equival a dir que la velocitat de propagació ν de l'ona sigui igual a la de la llum c .

10 Polaritzacions de les ones gravitatòries planes

De les dues condicions de (31), la primera es compleix sempre que la velocitat de propagació de l'ona (30) sigui la de la llum. La segona igualtat de (31) ens

dóna quatre condicions (una per a cada β) que relacionen els elements de la matriu A . Com que la matriu A és simètrica, en el cas genèric tindrà 10 elements diferents. Si aquests 10 elements estan relacionats per 4 equacions (segona condició de (31)), en quedaran 6 d'independents. És a dir, en el cas genèric, la matriu A tindrà 6 elements independents i els altres seran determinats per (31).

Veurem a continuació, però, que podem trobar un difeomorfisme infinitesimal ζ convenient de $\mathbb{R}^4$ tal que la h_ζ corresponent sigui de la forma

$$(h_\zeta)_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} e^{k_\nu x^\nu} \quad (32)$$

de manera que la matriu B compleixi les mateixes condicions que complia A , però tingui només 2 elements independents en comptes de 6. Amb aquest propòsit considerem un camp vectorial ζ de $\mathbb{R}^4$ de la forma

$$\zeta^\alpha = \text{Re}(P^\alpha e^{k_\nu x^\nu}), \quad (33)$$

amb els P^α números complexos a determinar. Com sempre, d'ara endavant ometrem $\text{Re}(\)$ en els càlculs. En virtut de la proposició 9, la h_ζ relativa a aquest camp ζ estarà relacionada amb la h que teníem per mitjà de

$$(h_\zeta)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \zeta_\beta - \nabla_\beta \zeta_\alpha.$$

Substituint aquí les $(h_\zeta)_{\alpha\beta}$, les $h_{\alpha\beta}$ i les ζ_α pels seus valors donats a (32), (30) i (33) i operant, s'obté:

$$B_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - ik_\alpha P_\beta - ik_\beta P_\alpha. \quad (34)$$

Aquesta fórmula relaciona les matrius $A = (A_{\alpha\beta})$ i $B = (B_{\alpha\beta})$, i a partir d'ella es veu fàcilment que si la matriu A complia (31), la matriu B compleix automàticament les mateixes relacions, és a dir, $B_{\mu\beta} k^\mu = \frac{1}{2}(\text{tr } B)k_\beta$, independentment dels valors que prenguin les P_α que encara no hem fixat.

Fixat un vector temporal u de l'espai de Minkowski, podem escollir els valors de les quatre P_α de manera que es compleixin les quatre relacions $B_{\alpha\beta} u^\beta = 0$. Això es fa imposant

$$(A_{\alpha\beta} - ik_\alpha P_\beta - ik_\beta P_\alpha) u^\beta = 0.$$

Es determinen les quatre P_α en funció de les $A_{\alpha\beta}$ a partir de les quatre equacions anteriors. En resum, la matriu B que finalment obtindrem complirà d'una banda les quatre relacions $B_{\mu\beta} k^\mu = \frac{1}{2}(\text{tr } B)k_\beta$ i les quatre relacions $B_{\alpha\beta} u^\beta = 0$. Com que la norma del vector temporal u escollit no influeix en la condició $B_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ que hem imposat, suposarem que u té norma *ic*. Si, per fixar les idees, escollim una base de l'espai de Minkowski que tingui u com a quart element, $u = (0, 0, 0, 1)$, la condició $B_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ s'escriu $B_{\alpha 4} = 0$.

En resum, la matriu B que finalment obtinguem a partir de (34) complirà d'una banda les quatre relacions $B_{\mu\beta} k^\mu = \frac{1}{2}(\text{tr } B)k_\beta$ i de l'altra, les quatre relacions $B_{\alpha 4} = 0$ que hem imposat. En total, 8 relacions per a 10 de les components de B . Per tant, només n'hi haurà 2 d'independents.

A més, aquesta matriu B tindrà traça nul·la. En efecte, fent $\beta = 4$ a les relacions $B_{\mu\beta}k^\mu = \frac{1}{2}(\text{tr } B)k_\beta$, com que els $B_{\mu 4}$ són nuls, ens queda $(\text{tr } B)k_4 = 0$ i, com que $k_4 \neq 0$, la traça de B s'ha d'anul·lar.

Suposem que prenem els tres eixos de $\mathbb{R}^3$ de manera que l'ona gravitatòria (32) que ens arriba segueix la direcció de l'eix de les z negatives (ens arriben de dalt del cel!). Aleshores el vector d'ona de $\mathbb{R}^3$ serà $k = (0, 0, -\omega/c)$ i les components k^α del vector d'ona de l'espai de Minkowski seran $(0, 0, -\omega/c, \omega/c)$. Així, la relació $B_{\mu 1}k^\mu = 0$ ens dóna $B_{31} = 0$, la relació $B_{\mu 2}k^\mu = 0$ ens dóna $B_{32} = 0$ i la relació $B_{\mu 3}k^\mu = 0$ ens dóna $B_{33} = 0$. Com que la traça ha de ser nul·la, la matriu B adopta la forma següent:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{12} & -B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Considerem les dues matrius següents:

$$A_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\times = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Òbviament, la matriu B s'expressa com a combinació lineal d'aquestes dues. Per tant, tota ona gravitatòria plana de la forma (32) que ens arriba a nosaltres en la direcció de les z negatives és combinació lineal de $h_+ = A_+ \cos(\omega(\frac{z}{c} + t))$ i de $h_\times = A_\times \cos(\omega(\frac{z}{c} + t))$, que s'anomenen *ones gravitatòries polaritzades*. Com que l'origen de temps és arbitrari, canviant t per $t + t_0$ a $\omega(\frac{z}{c} + t)$ ens queda de la forma $\omega(\frac{z}{c} + t) + \zeta$, on ζ indica la fase. Per tant, l'expressió més general seria $h_+ = A_+ \cos(\omega(\frac{z}{c} + t) + \zeta)$, $h_\times = A_\times \cos(\omega(\frac{z}{c} + t) + \zeta)$.

Observeu que, com que la tercera fila de les matrius anteriors és nul·la, les ones no tenen component en z i són, per tant, transverses a la direcció de propagació. Aclarim que els símbols $+$ i $\times$ de h_+ i $h_\times$ no tenen cap relació amb cap suma ni producte, sinó que indiquen «en creu» i «en aspa», denominació que quedarà justificada més endavant. La *gauge* determinada de manera que l'ona que ens arriba en la direcció de l'eix de les z tingui la forma (35) rep el nom anglès de *Transverse Traceless Lorentz gauge*, abreujadament, *TT-gauge*, i nosaltres en direm *referència TT*.

11 Efectes d'una ona gravitatòria sobre partícules lliures

Suposem una partícula en una regió lliure de camps gravitatoris. La seva vida serà descrita per una recta de l'espai de Minkowski de vector director temporal u . Quan arriba una ona en la direcció de l'eix de les z , ona formada per la superposició d'ones monocromàtiques de la forma (29), elegim la referència *TT* de manera que el vector u que ens servia per fixar les quatre P_α sigui

el vector u de la vida d'aquesta partícula, i elegim llavors la base de l'espai de Minkowski de manera que u sigui el quart element de la base. La vida de les partícules lliures serà descrita per geodèsiques $\gamma(\tau)$ les components de les quals compliran les equacions de les geodèsiques

$$\frac{d^2 \gamma^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \frac{d\gamma^\alpha}{d\tau} \frac{d\gamma^\beta}{d\tau}. \quad (36)$$

Veurem ara que en la referència TT els símbols de Christoffel Γ_{44}^λ són nuls. En efecte,

$$\Gamma_{44}^\lambda \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu} (\partial_4 h_{\mu 4} + \partial_4 h_{4\mu} - \partial_\mu h_{44}). \quad (37)$$

Però, en virtut de la forma (35) de les amplituds de les $h_{\alpha\beta}$, totes les $h_{\alpha 4}$ són nul·les. Aleshores, de (37) se segueix que $\Gamma_{44}^\lambda = 0$.

La vida de la partícula que considerem, abans que l'ona hi arribés, era representada per una recta vertical $\gamma(\tau) = (x_0, y_0, z_0, \tau)$ de l'espai de Minkowski, amb x_0, y_0, z_0 constants. Quan arriba l'ona, la mètrica de l'espai canvia i passa a ser $\eta + h$. Però com que els símbols de Christoffel Γ_{44}^λ de la nova mètrica s'anul·len, la mateixa corba $\gamma(\tau) = (x_0, y_0, z_0, \tau)$ compleix les equacions (36) i és una geodèsica de la nova mètrica. Per tant, segueix en caiguda lliure i no nota cap acceleració. Això no és gens estrany ja que qualsevol partícula en caiguda lliure segueix en caiguda lliure quan canvia el camp gravitatori. El que aquí pot sorprendre és el fet que la descripció en coordenades de la vida $\gamma(\tau)$ de la partícula sigui exactament la mateixa.

Com que la mètrica ha canviat en arribar l'ona, l'única manera que té un observador intel·ligent que viatgi amb la partícula d'adonar-se de la presència de l'ona és mesurant la posició de partícules pròximes. L'observador atribuirà a les partícules pròximes una acceleració donada pel teorema 8 de la secció 4. Segons aquest teorema, l'acceleració que l'observador atribuirà a una partícula pròxima de vector posició ξ serà $R(\dot{\gamma}, \xi)\dot{\gamma}$. Designem per a^i les tres components d'aquest vector acceleració. Tindrem

$$a^i = \xi^j R_{4j4}^i. \quad (38)$$

Per aplicar aquesta fórmula ens cal calcular les components del tensor de curvatura de la mètrica $\eta + h$ en la referència TT. La fórmula (10) aplicada a la mètrica $\eta + h$ ens dóna

$$R_{4\mu 4}^\rho \approx \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\nabla_\mu \nabla_4 h_{4\lambda} - \nabla_4 \nabla_\mu h_{4\lambda} + \nabla_\mu \nabla_4 h_{\lambda 4} - \nabla_\mu \nabla_\lambda h_{44} + \nabla_4 \nabla_\lambda h_{4\mu} - \nabla_4 \nabla_4 h_{\lambda\mu}). \quad (39)$$

Les components de derivades covariants que apareixen en aquesta fórmula (per exemple, $\nabla_4 h_{4\lambda}$) s'expressen com a derivades ordinàries ($\partial_4 h_{4\lambda}$) més termes on apareixen productes de símbols de Christoffel per $h_{\lambda\mu}$. Com que els símbols de Christoffel s'expressen en funció de les $h_{\lambda\mu}$, aquests termes contindran

dues $h_{\lambda\mu}$ i en el context de l'aproximació lineal que fem són negligibles. Per tant, les derivades covariants que apareixen a (39) podem considerar que són derivades ordinàries. D'altra banda, en la referència TT totes les $h_{4\lambda}$ són nul·les. Per tant, ens queda

$$R_{4\mu 4}^{\rho} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{\lambda\mu}.$$

Tenint en compte que ξ és el vector posició de la partícula respecte a l'observador i que l'acceleració de la partícula respecte a l'observador és $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, la fórmula (38) ens quedarà (recordem que els índexs grecs varien d'1 a 4 i els llatins d'1 a 3):

$$a^i = \frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\xi^j\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2}.$$

Tot i que ξ varia amb el temps, podem substituir amb tota tranquil·litat el vector ξ que apareix al segon membre de l'equació anterior pel valor ξ_0 que pren a l'instant $t = 0$ perquè tots els valors de ξ són molt propers a ξ_0 . Ens queda, doncs,

$$a^i = \frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\xi_0^j\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2}. \quad (40)$$

Aplicarem ara aquesta fórmula per veure com són les acceleracions de les partícules segons la posició que ocupen respecte a l'observador. Recordem que en la referència TT que usem se suposa que l'ona avança en la direcció de les z negatives (ve de dalt). Suposem que l'observador es troba a l'origen i que observa una partícula inicialment situada al punt $\xi_0 = (\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta, 0)$. Per simplificar-ho, suposem que l'ona que passa (monocromàtica) té polarització + (qualsevol ona és suma d'una ona amb polarització + i una altra amb polarització $\times$). Sigui H l'amplitud d'aquesta ona. Com hem vist a la secció 10, les components $h_{\alpha\beta}$ no nul·les d'aquesta ona (en el pla $z = 0$) són $h_{11} = H \cos(\omega t + \zeta)$, $h_{22} = -H \cos(\omega t + \zeta)$. Prenguem l'origen de temps de manera que la fase ζ de l'ona sigui $-\pi/2$, amb la qual cosa $h_{11} = H \sin \omega t = -h_{22}$. Tindrem $\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} = -H\omega^2 \sin \omega t$ i $\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} = H\omega^2 \sin \omega t$. D'acord amb (40), el vector acceleració serà

$$a = \frac{\varepsilon\omega^2 H \sin \omega t}{2}(\cos \theta, -\sin \theta, 0).$$

Els valors d'aquesta acceleració corresponents a $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ (dues partícules inicialment en posicions oposades sobre l'eix de les x) són

$$a[0] = \frac{\varepsilon\omega^2 H \sin \omega t}{2}(1, 0, 0), \quad a[\pi] = \frac{\varepsilon\omega^2 H \sin \omega t}{2}(-1, 0, 0).$$

Constatem que sobre elles actuen forces oposades. I els valors corresponents a $\theta = \pi/2$ i $\theta = -\pi/2$ (partícules inicialment en posicions oposades sobre l'eix de les y) són

$$a[\pi/2] = \frac{\varepsilon\omega^2 H \sin \omega t}{2}(0, -1, 0), \quad a[-\pi/2] = \frac{\varepsilon\omega^2 H \sin \omega t}{2}(0, 1, 0).$$

Sobre elles també actuen forces oposades, però amb sentit diferent de les de l'eix de les x (vegeu la figura 2).

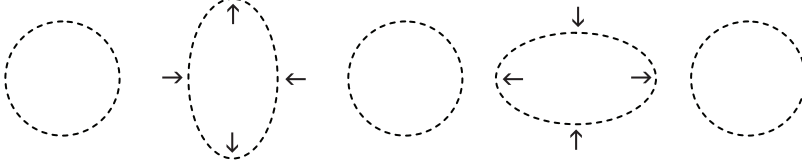


FIGURA 2

Si en comptes de treballar amb una ona de polarització $+$ ho haguéssim fet amb una de polarització $\times$ hauríem arribat a conclusions similars sobre les partícules situades en posicions oposades sobre les rectes $y = x$ i $y = -x$.

Fins ara hem calculat l'acceleració que l'observador mesurarà d'una partícula situada inicialment en la posició $\xi_0 = (\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta, 0)$. Preocupem-nos ara, no de l'acceleració, sinó de la posició que l'observador mesurarà al llarg del temps. La integral general de (40) és

$$\xi^1 = -\frac{\varepsilon H}{2} \cos \theta \sin \omega t + k^1 t + C^1,$$

$$\xi^2 = \frac{\varepsilon H}{2} \sin \theta \sin \omega t + k^2 t + C^2,$$

amb k^1, k^2, C^1, C^2 constants d'integració. Les constants k^1 i k^2 hauran de ser nul·les per excloure moviments uniformes de la partícula respecte de l'observador, i les constants C^1, C^2 s'han d'escollir de manera que, per a $t = 0$, la posició de la partícula sigui ξ_0 . Ens queda, finalment,

$$\xi = \left(\varepsilon \cos \theta - \frac{\varepsilon H}{2} \cos \theta \sin \omega t, \varepsilon \sin \theta + \frac{\varepsilon H}{2} \sin \theta \sin \omega t, 0 \right). \quad (41)$$

Com hem fet abans amb l'acceleració, explicitem aquest vector posició ξ per a dues partícules situades inicialment sobre l'eix de les x en posicions oposades (corresponents a $\theta = 0$ i $\theta = \pi$) i per a partícules en posicions oposades sobre l'eix de les y (corresponents a $\theta = \pi/2$ i $\theta = -\pi/2$). Tindrem:

$$\begin{aligned} \xi[0] &= \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon H}{2} \sin \omega t, 0, 0 \right), & \xi[\pi] &= \left(-\varepsilon + \frac{\varepsilon H}{2} \sin \omega t, 0, 0 \right), \\ \xi[\pi/2] &= \left(0, \varepsilon + \frac{\varepsilon H}{2} \sin \omega t, 0 \right), & \xi[-\pi/2] &= \left(0, -\varepsilon - \frac{\varepsilon H}{2} \sin \omega t, 0 \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Com passava amb les acceleracions, veiem aquí també que les vibracions de les dues partícules sobre l'eix de les x i de les dues sobre l'eix de les y són oposades. Quan les primeres s'allunyen, les segones s'apropen i viceversa. Com

hem dit abans, també, si en comptes de treballar amb una ona de polarització $+$ ho haguéssim fet amb una de polarització $\times$ hauríem arribat a conclusions similars sobre les partícules situades en posicions oposades sobre les rectes $y = x$ i $y = -x$.

12 Aparells per detectar ones gravitacionals

Si bé al llarg dels cent anys d'història de la relativitat general s'han ideat diversos aparells per detectar ones gravitatòries, els que s'han imposat últimament són els basats en la mesura per interferometria dels canvis oscil·latoris produïts en la distància entre partícules situades en direccions perpendiculars, donats per (42).

Abans de descriure el seu funcionament recordem que vivim en una regió on els camps gravitatoris pròxims no produeixen ones gravitacionals. En efecte, hem dit a la secció 8 que els camps gravitatoris estàtics (que no depenen del temps) no produeixen ones. Per tant, el camp de la Terra (el més pròxim), considerat aïlladament, no produeix ones. El camp global del Sistema Solar sí que produeix ones en virtut del moviment dels planetes, però són d'una intensitat molt petita i d'una freqüència també molt petita. Quan més endavant comentem l'ona captada pels detectors de LIGO el 14 de setembre de 2015, analitzarem un senyal de mig segon de durada. Com que la variació de la posició dels diferents planetes del Sistema Solar en mig segon és pràcticament negligible, les ones gravitacionals produïdes per aquesta variació també ho són.

Dit això, passem a descriure el funcionament dels detectors d'ones basats en la interferometria. L'esquema d'aquests detectors està il·lustrat en la figura 3. Suposem que ens arriba una ona de polarització $+$. Suposem que el detector està orientat de manera que els eixos x , y de l'esquema de la figura 3 corresponguin als eixos x , y de la referència TT adaptada a l'ona (segons aquesta referència l'ona es propaga en la direcció de l'eix de les z). Fem entrar a l'aparell per A un raig làser de llum monocromàtica de longitud d'ona λ (en principi aquesta longitud d'ona λ pot ser arbitrària i no té res a veure amb l'ona gravitatòria). Aquest raig incideix en un prisma que actua com a separador del raig. Una meitat del raig és reflectida pel prisma (que actua com a mirall) i enviada al mirall M_1 i l'altra meitat del raig travessa el prisma i va cap al mirall M_2 . Cada un dels dos raigs que han sortit del prisma separador és reflectit pel mirall corresponent (per M_1 o per M_2) i torna al prisma separador. Allà els dos raigs són enviats a un fotodetector B .

Abans de passar l'ona, la distància entre el prisma separador (que suposarem situat a l'origen de coordenades de la referència TT que hem pres) i cada un dels miralls M_1 i M_2 és L (la mateixa distància). Però aquestes distàncies oscil·len quan passa l'ona, i segons (42), quan l'una creix en ΔL l'altra decreix en la mateixa quantitat, de manera que quan els dos raigs que han seguit camins diferents tornen a retrobar-se en el prisma separador, arriben amb fases diferents i això és el que detecta el fotodetector B .

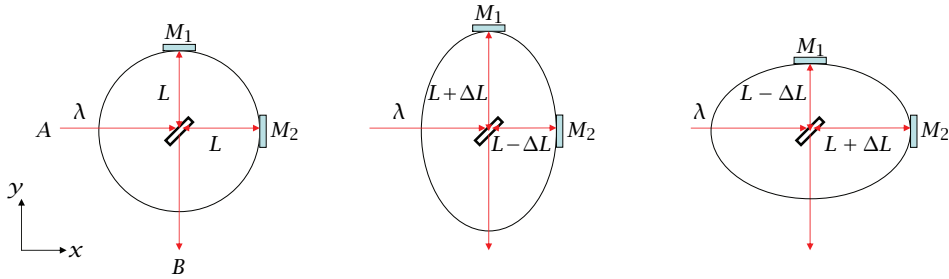


FIGURA 3

En la deducció de les fórmules (41) i (42) hem suposat que tant l'observador com la partícula de la qual aquest mesura la posició estan en *caiguda lliure*. Per tant, en el disseny de l'aparell anterior, tant el prisma separador com els miralls M_1 i M_2 haurien d'estar en caiguda lliure. Com que això és impossible de realitzar en un aparell terrestre, pensem per un moment què passaria si el prisma separador i els miralls M_1 i M_2 estiguessin penjats d'un fil (en comptes d'estar en caiguda lliure). Recordem que hem suposat, de moment, que els eixos x , y de l'esquema de la figura 3 corresponen als eixos x , y de la referència TT adaptada a l'ona, la qual es propaga en la direcció de l'eix de les z . Per tant, les variacions en la distància entre el separador i els miralls només es produeixen en el pla de les x , y , i no en la direcció vertical de l'eix de les z . Així doncs, si els miralls i el separador estiguessin penjats d'un fil (en comptes d'estar en caiguda lliure), com que el fil només anul·la el moviment d'aquests miralls en la direcció de l'eix de les z , la distància entre ells en passar l'ona seria la mateixa que si estiguessin en caiguda lliure. Naturalment, això que els miralls i el separador estiguin «penjats d'un fil» és una manera simplificada de dir *convenientment lliures*, sense estar subjectes a terra de forma sòlida.

Tot això que hem dit fa referència a una situació en què l'ona té polarització $+$ i que, a més, l'aparell és orientat de tal manera que els eixos x , y d'aquest coincideixin amb els eixos x , y de la referència TT de l'ona (la qual viatja en la direcció de l'eix de les z). Però l'aparell és una construcció molt sofisticada amb els dos braços que uneixen el separador central amb els miralls M_1 i M_2 d'una longitud molt gran (en el LIGO són de 4 km) i no podem pas orientar l'aparell per adaptar-lo a cada ona particular que ens pugui arribar. En aquestes circumstàncies, mesurarà alguna cosa un detector com el que acabem de descriure?

Per veure-ho, continuem suposant de moment que l'ona viatja en la direcció de l'eix de les z , però suposem que els braços de l'aparell al final dels quals es troben els miralls M_1 i M_2 formen un angle θ amb els eixos x i y de la referència TT de l'ona, tal com indica la figura 4. La fórmula (41) ens donarà la posició del mirall M_2 al llarg del temps (la fórmula s'ha d'aplicar amb $\varepsilon = L$,

distància abans del pas de l'ona entre M_2 i el prisma separador). Així, doncs, la posició de M_2 en el pla de les x i les y serà:

$$M_2 = L \left(\cos \theta \left(1 - \frac{H}{2} \sin \omega t \right), \sin \theta \left(1 + \frac{H}{2} \sin \omega t \right) \right).$$

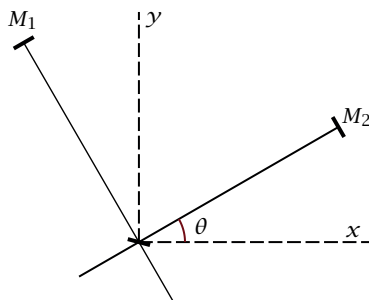


FIGURA 4

La distància de M_2 al prisma separador situat a l'origen és la norma del vector anterior, és a dir,

$$L \sqrt{1 - H \cos 2\theta \sin \omega t + \frac{H^2}{2} \sin^2 \omega t}.$$

Tenint en compte que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$, aquesta distància queda (tenint en compte que H és molt petit i es poden negligir els termes en H^2):

$$L \left(1 - \frac{H \cos 2\theta}{2} \sin \omega t \right).$$

Per tant, l'increment de longitud d'aquest braç, ΔL (diferència entre l'expressió anterior i L), serà $-L(H/2) \cos 2\theta \sin \omega t$. Si fem el mateix càlcul per al braç que conté el mirall M_1 , obtindrem que l'increment ΔL d'aquest braç és $L(H/2) \cos 2\theta \sin \omega t$.

Fixem-nos que quan l'angle θ és de 45 graus, els increments dels dos braços són nuls i l'aparell no detecta res. Tot això, suposant que la polarització de l'ona és $+$. Ja hem dit que les ones amb polarització $\times$ es comporten anàlogament però amb un gir de 45 graus. Per tant, quan l'angle entre el braç de l'aparell que conté M_2 i l'eix de les x de la referència TT de l'ona és de 45 graus, l'aparell no detecta les ones amb polarització $+$, però sí que detecta (i amb amplitud màxima!) les de polarització $\times$. Com que normalment les ones que arriben tenen components en les dues polaritzacions, l'aparell sempre és capaç de detectar l'ona.

Tots aquests càlculs i raonaments els hem fet, però, suposant que l'ona ens arriba verticalment, en la direcció de l'eix de les z . Si no és així, les amplituds quedaran afectades pel cosinus de l'angle entre la direcció de propagació i la vertical. Per tant, com més s'aparti la direcció de l'ona de la vertical més feble serà el senyal captat.

13 L'esdeveniment astronòmic GW150914

Ja hem dit a la introducció que el 14 de setembre de 2015, a les 9:50:45 de temps universal, els dos detectors bessons de LIGO van captar un senyal d'unes dues dècimes de segon de durada, que després d'una anàlisi acurada s'ha atribuït a les ones gravitatòries produïdes per la fusió de dos forats negres situats a uns 410 Mpc de distància, és a dir, a uns 1340 milions d'anys llum. Aquell esdeveniment astronòmic ha rebut el nom científic de GW150914 i no va ser anunciat públicament fins al 14 de febrer de 2016, data en què va aparèixer publicat a la revista *Physical Review Letters* un article [3], signat per 1023 investigadors de LIGO i de VIRGO, que oferia informació científica de la descoberta. Paral·lelament altres articles van ser penjats a Internet, entre els quals [1] i [2]. També hem dit a la introducció que actualment hi ha al món diversos detectors d'ones gravitatòries, els més sensibles dels quals són els dos bessons de LIGO, un a Livingston (Louisiana) i l'altre a Hanford (Washington), i VIRGO, a Itàlia, però justament el dia de la detecció del senyal GW150914 l'aparell de VIRGO estava fora de servei per treballs de posada al dia, de manera que només va poder ser captat pels detectors de LIGO.

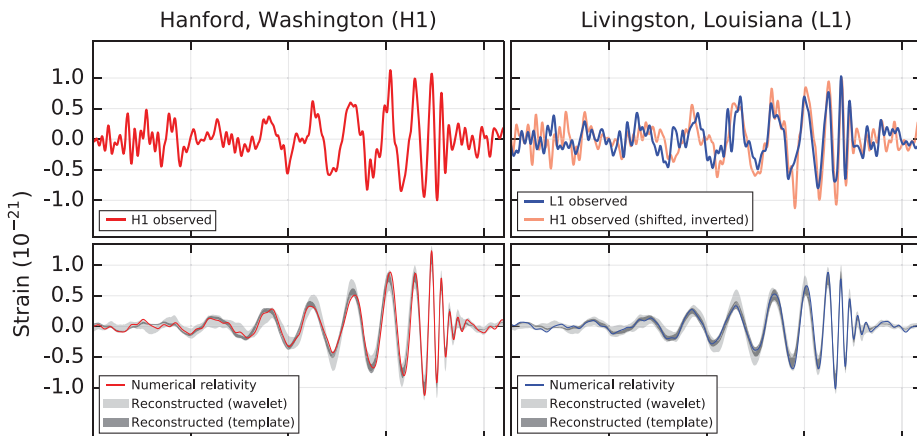


FIGURA 5

El senyal en qüestió està representat en les gràfiques de la figura 5. Les unitats marcades a l'eix d'abscisses corresponen a 0.30, 0.35, 0.40 i 0.45 segons,

i les unitats marcades a l'eix d'ordenades corresponen a l'amplitud de l'ona; d'elles en parlarem després més extensament. Les dues gràfiques de dalt (de la figura 5) són pròpiament els senyals captats pels dos observatoris, mentre que les dues gràfiques de baix corresponen a simulacions teòriques.

En aquest article hem explicat bastant detalladament la naturalesa de les ones gravitatòries que ens arriben a nosaltres (que vivim en una regió de l'Univers lliure de camps gravitacionals intensos), però no hem tractat en absolut la manera com les ones són produïdes en regions llunyanes. I això és fonamental per saber quin tipus de senyals esperem detectar. Un tipus d'ona molt estudiat des del punt de vista teòric és el produït per parells d'estrelles que giren l'una entorn de l'altra a grans velocitats. Aquests sistemes poden romandre estacionaris durant temps i poden acabar amb un col·lapse i fusió de les dues estrelles. Les dues estrelles que orbiten l'una entorn de l'altra poden ser forats negres quan les densitats de massa són molt grans. Justament en les dues gràfiques de baix de la figura 5 es mostren les simulacions teòriques que més s'adiuen amb les gràfiques reals observades, i aquestes simulacions corresponen a la fusió de dos forats negres. La freqüència del senyal és justament la que indica la massa de les estrelles que es fusionen i l'amplitud del senyal és la que ens permet estimar la distància nostra a les estrelles.

Observeu que en els articles científics sobre aquest esdeveniment s'ofereixen dades bastant precises sobre la massa estimada dels dos forats negres que col·lideixen i sobre la seva distància a nosaltres, però es parla de manera molt imprecisa de la seva localització. No es pot concretar de cap manera a quina galàxia corresponen. Això és degut al fet que els detectors no poden precisar la direcció dels raigs que reben. Hem vist a la secció 12 que l'amplitud del senyal és afectada pel cosinus de l'angle entre la direcció de propagació de l'ona i la vertical. Si una ona és detectada en diversos llocs de la Terra, coneixent els temps d'arribada del senyal als diferents indrets i les amplituds d'aquests senyals es podria determinar la direcció de propagació. Però com que l'ona de la qual parlem només va ser detectada per dos observatoris separats per 3030 km, això és molt difícil. L'única dada certa sobre això és que el senyal va arribar a Livingston 10 mil·lisegons abans que a Hanford. Tot i la dificultat d'establir la direcció de l'ona en aquestes condicions, els científics de LIGO situen la seva font en una zona concreta d'uns 600 graus quadrats de l'hemisferi sud celeste.

Hem deixat per al final el tema de les unitats de l'eix d'ordenades de les gràfiques de la figura 5, perquè és el que més pot donar idea de l'enorme dificultat tecnològica de la detecció d'aquestes ones. Aquestes unitats mesuren el quocient $\Delta L/L$ entre la variació de longitud dels braços de l'interferòmetre en passar l'ona i la longitud inicial. Es tracta, doncs, d'una magnitud sense dimensió (longitud dividit per longitud). En les gràfiques de la figura 5, les unitats de l'eix d'ordenades van afectades del factor 10^{-21} . Comentem això una mica:

La unitat astronòmica (au) és la distància mitjana de la Terra al Sol i val aproximadament 1.49598×10^{14} mil·límetres. O sigui que apreciar un mil·límetre en la distància de la Terra al Sol seria de l'ordre de 10^{-14} . I nosaltres

estem parlant de 10^{-21} . Això representa apreciar un mil·límetre en una distància 6 600 000 vegades més gran que la distància de la Terra al Sol! Val a dir, però, que l'aparell no cal que mesuri la longitud L dels braços amb tantíssima precisió (cosa absolutament impossible), sinó que el que ha de detectar són les variacions ΔL d'aquesta longitud.

Referències

- [1] ABBOT, B. P. [*et al.*] (LIGO Scientific Collaboration and VIRGO Collaboration). «Observing gravitational-wave transient GW150914 with minimal assumptions». https://dcc.ligo.org/public/0122/P1500229/031/GW150914_burst.pdf.
- [2] ABBOT, B. P. [*et al.*] (LIGO Scientific Collaboration and VIRGO Collaboration). «Properties of the binary black hole merger GW150914». *Phys. Rev. Lett.*, 116, 241102 (2016). <https://dcc.ligo.org/public/0122/P1500218/014/PhysRevLett.116.241102.pdf>.
- [3] ABBOT, B. P. [*et al.*] (LIGO Scientific Collaboration and VIRGO Collaboration). «Observation of gravitational waves from binary black hole merger». *Phys. Rev. Lett.*, 116, 061102 (2016). https://dcc.ligo.org/public/0122/P150914/014/LIGO-P150914_Detection_of_GW150914.pdf.
- [4] BERTI, E. «Viewpoint: The first sounds of merging black holes». *Physics*, 9, 17 (February 11, 2016). <https://physics.aps.org/articles/v9/17>.
- [5] EINSTEIN, A. «Zur Elektrodynamik bewegter Körper». *Ann. der Phys. (4)*, 17 (1905), 891–921.
- [6] EINSTEIN, A. «Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?». *Ann. der Phys. (4)*, 18 (1905), 639–641.
- [7] EINSTEIN, A. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». *Ann. der Phys. (4)*, 49 (1916), 769–822.
- [8] EINSTEIN, A. «Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation». *Berl. Ber.*, 1916 (1916), 688–696.
- [9] EINSTEIN, A. «Über Gravitationswellen». *Berl. Ber.*, 1918 (1918), 154–167.
- [10] GIRBAU, J. «Relatividad: un curso acelerado». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 2 (2) (1999), 237–262.
- [11] GIRBAU, J.; BRUNA, L. *Stability by linearization of Einstein's field equation*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2010. (Progress in Mathematical Physics; 58)
- [12] MINKOWSKI, H. «Raum und Zeit». *Physikalische Zeitschrift*, 10 (1909), 104–111. [Conferència donada a la vuitantena reunió de científics naturals i metges alemanys, a Colònia, el 21 de setembre de 1908]
- [13] SCHUTZ, B. F. *A first course in general relativity*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [14] STEPHANI, H. *General relativity. An introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge; Nova York: Cambridge University Press, 1982.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
girbau@mat.uab.cat

Fonaments geomètrics de la reconstrucció 3D

JOAN CARLES NARANJO

Resum: En aquest article fem una introducció als principis geomètrics que intervenen en la reconstrucció 3D d'una escena a partir de dues imatges digitals seves. Començarem explicant la modelització de la càmera i el seu calibratge. A continuació tractarem la geometria epipolar, és a dir, l'estudi de la posició relativa entre les dues càmeres des de les quals fem les fotografies de l'escena. Aquesta informació es codifica en la matriu fonamental, en el cas no calibrat, i en la matriu essencial, en el cas calibrat. Finalment descriurem com es realitza la reconstrucció efectiva a partir de la matriu essencial.

Paraules clau: càmera estenopeica, calibratge, matriu fonamental, matriu essencial.

Classificació MSC2010: 68T45.

1 Introducció

Des de fa temps ens estem acostumant que els ordinadors llegeixin per nosaltres. És ben habitual entrar en un pàrquing i que una càmera connectada a un ordinador i enfocada a la matrícula del cotxe «reconegui» les xifres i lletres que la componen. També sabem que moltes anàlisis clíniques estan automatitzades de manera que el comptatge de determinats tipus de cèl·lules no requereix la intervenció de l'ull humà. I no ens sorprenem quan ens diuen que s'ha pogut situar un robot petit sobre la superfície de Mart que es mou autònomament, decidint per ell mateix quina ruta ha de seguir i quins obstacles ha d'evitar; en definitiva, és un robot que «hi veu».

La llista d'exemples és interminable i cada vegada són més presents en la vida quotidiana. La branca de les ciències de la computació que se n'ocupa rep el nom de *visió per ordinador* (*computer vision*) i se sol considerar una part de l'àmbit de la intel·ligència artificial.



Del que volem parlar aquí és de les matemàtiques que s'utilitzen en alguns d'aquests processos. Com que el tema és amplíssim i només tenim la pretensió d'oferir-ne una pinzellada, farem dues reduccions dràstiques. La primera és que tan sols parlarem del que es coneix com a *reconstrucció 3D*, que, com fàcilment es pot imaginar, consisteix a extreure informació de dues o més fotografies digitals d'un mateix entorn per tal de poder deduir la posició en l'espai de tants punts com sigui possible de l'entorn original. La segona restricció, explicitada en el títol, consistirà a centrar-nos en els aspectes geomètrics del procés.

2 Una experiència docent

Abans de començar amb el contingut matemàtic voldria fer alguns comentaris. No sóc en absolut un expert en visió per ordinador, sinó que la meua relació amb aquesta àrea es redueix a participar en la docència d'una assignatura anomenada *geometria de la visió per ordinador* en la qual fèiem una introducció al tema posant l'èmfasi en la reconstrucció 3D. El que explicaré en les seccions posteriors és un resum en to divulgatiu de la meua part de l'assignatura: la geomètrica. Res no hauria tingut sentit si no hagués anat acompanyat de les altres dues parts: una introducció al processament d'imatges, a càrrec de José Ignacio Burgos, i unes pràctiques d'ordinador en llenguatge C ideades i implementades per Ferran Espuny amb la col·laboració del mateix José Ignacio Burgos. Tots dos varen aprofundir molt més que jo en aquesta àrea fins al punt que José Ignacio Burgos va acabar dirigint la tesi doctoral de Ferran Espuny en aquest tema. L'argument principal d'aquesta tesi [1], defensada el 2009, és el calibratge de les càmeres, un aspecte del qual parlarem de seguida.

El nostre interès per la visió per ordinador neix d'un seminari conjunt amb investigadors de l'IRI (Institut de Robòtica i Informàtica Industrial), dependent del CSIC, en el qual vam fixar com a objectiu explorar el llibre de Hartley-Zisserman [3]. Vam descobrir així un àmbit de recerca molt aplicat amb un component geomètric important, especialment projectiu, excel·lentment explicat en l'esmentat llibre i que ens va atreure immediatament. L'aplicabilitat i transversalitat del tema ens va fer creure que podria donar peu a una assignatura optativa (posteriorment també de màster) atractiva i útil per als estudiants de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, com així va ser. Diversos alumnes que la van cursar van continuar els seus estudis de visió per ordinador en altres centres del nostre entorn o de l'estranger i han acabat lligant la seva vida professional i acadèmica a aquesta àrea.

3 Una aproximació de butxaca a l'espai projectiu

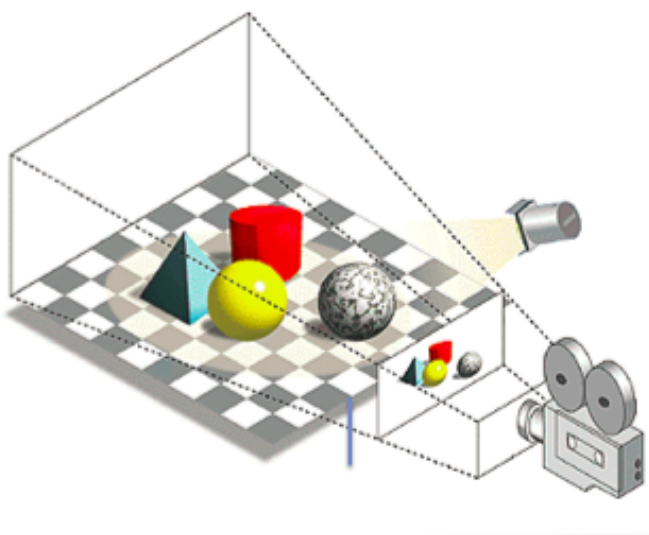
Com veurem en la propera secció, la modelització de les càmeres fotogràfiques se simplifica quan es considera en el context projectiu. Donem-ne una idea intuïtiva abans d'entrar en definicions: l'espai projectiu associat a $\mathbb{R}^n$ consisteix a afegir punts nous que corresponen a les «direccions de fuga» del nostre espai afí. En poques paraules, és un objecte geomètric on conviuen els punts i els vectors lliures com a elements del mateix conjunt. La manera més fàcil d'introduir-lo és utilitzant les anomenades *coordenades homogènies*. Posem-nos en el cas tridimensional ($n = 3$) per facilitar la notació. Un punt del nostre espai projectiu $\mathbb{P}^3$ està determinat per *quatre* constants reals ordenades que posem de la forma $(x : y : z : t)$ i que estan subjectes a dues normes: no totes elles són nul·les simultàniament, i dues quàdruples $(x : y : z : t)$ i $(x' : y' : z' : t')$ són considerades iguals (o que representen el mateix punt de $\mathbb{P}^3$) si existeix una constant de proporcionalitat λ de manera que $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$ i $t' = \lambda t$. Així, si la darrera coordenada t és no nul·la podem dividir per ella i obtenir un element de la forma $(a : b : c : 1)$, en què les tres primeres coordenades estan normalitzades. Identificant (a, b, c) amb un punt de $\mathbb{R}^3$, tenim la igualtat de conjunts:

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{(x : y : z : t) \mid t = 0\}.$$

Aquesta darrera igualtat posa de manifest la idea expressada inicialment: l'espai projectiu $\mathbb{P}^3$ és una unió (disjunta) dels punts de l'espai afí ordinari $\mathbb{R}^3$ amb un pla d'equació $t = 0$ que parametriza, mòdul multiplicació per escalar, els vectors de l'espai. Així, la recta afí $(a, b, c) + \langle (u_1, u_2, u_3) \rangle$ s'identifica amb la recta de $\mathbb{P}^3$ que passa pels punts de coordenades homogènies $(a : b : c : 1)$ i $(u_1 : u_2 : u_3 : 0)$. En particular, dues rectes paral·leles de $\mathbb{R}^3$ passen a ser dues rectes secants i el punt d'intersecció es troba al pla de l'infinit.

4 Geometria d'una vista: càmeres i matrius

De manera molt simplificada es podria dir que una càmera fotogràfica consisteix en un aparell que en activar-lo els raigs de llum hi penetren dins per un forat minúscul i impacten en un pla. De manera ideal podem pensar, doncs, que una càmera és el parell format per un punt C per on passa la llum que es rep de l'escena, que anomenem *centre*, i per un pla $\mathcal{R}$ anomenat *retinal*. Aquest model s'anomena *model estenopeic* (*pinhole model*) o de *càmera obscura*.

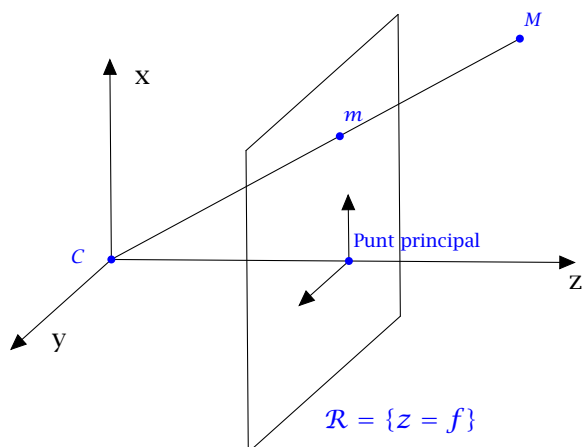


Suposarem que el pla està recobert per sensors digitals que tenen la capacitat de captar el color del raig de llum que hi ha impactat guardant-lo en la memòria de manera codificada, per exemple amb un codi RGB format per tres nombres, cadascun de 0 a 255, que ens indiquen la intensitat d'il·luminació vermella (R), verda (G) i blava (B) que cal posar per obtenir el color corresponent. Avui dia tots estem familiaritzats amb el terme *megapíxel* utilitzat en relació amb una càmera fotogràfica. Aquest terme ve a dir quants sensors tindrem en el pla retinal i, per tant, quina qualitat tindrà la nostra càmera (sense entrar en altres aspectes tant o més importants, com ara l'òptica): com més píxels més sensors i, per tant, més informació recollida per centímetre quadrat.

Per modelitzar geomètricament una càmera, la veiem com una aplicació

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{C\} \rightarrow \mathcal{R}$$

en què s'envia un punt M de l'espai (una mica pomposament se sol dir que és un punt *del món*) al punt del pla retinal m obtingut intersecant la recta MC amb $\mathcal{R}$.



Posem coordenades de manera que l'origen $(0,0,0)$ sigui el punt C i que el pla retinal $\mathcal{R}$ sigui el pla $z = f$, on f és la distància entre el centre i el pla retinal, que és el que s'anomena *distància focal*. Anomenem *punt principal* la projecció ortogonal del centre sobre el pla retinal; és el punt de coordenades $(0,0,f)$. Un càlcul senzill ens diu que si $M = (x, y, z)$, aleshores $m = (fx/z, fy/z, f)$. Trobem aquí una de les motivacions per passar-nos al càlcul amb coordenades homogènies o, dit d'una altra manera, per «projectivitzar» el problema: evitar quocients, convertir la transformació en lineal i, per tant, poder representar matricialment el nostre model. Considerem la càmera com l'aplicació:

$$\mathbb{P}^3 \setminus \{C\} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}$$

que envia $M = (x : y : z : t)$ a $m = (fx : fy : z)$. Tenim així una transformació governada per la matriu

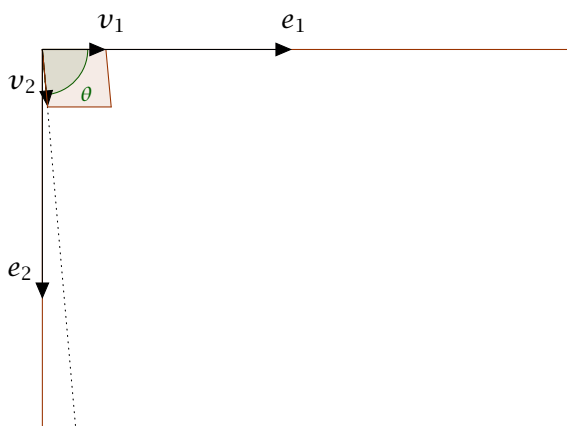
$$A = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En realitat, les coses no són tan senzilles. Quan movem la càmera, les coordenades «món» van variant segons una rotació i una translació. D'altra banda, les coordenades escollides dins el pla retinal no són naturals; són molt simples des d'un punt de vista matemàtic, però poc ajustades a la manera com realment es poden portar a terme els càlculs. La informació que ens dóna una fotografia és una col·lecció de codis de colors cadascun del quals correspon a un píxel. Per tant, sembla més apropiat usar aquesta xarxa discreta de petitíssims quadradets que constitueixen la imatge. Per fer-ho agafem com a origen de coordenades l'extrem superior esquerre de la nostra graella de sensors, i com a eixos, les direccions que marquen els mateixos píxels. Les unitats les donen les longituds horitzontal i vertical del píxel. Aquest sistema de coordenades

no és necessàriament ortogonal, ja que, per molt perfecta que sigui la nostra càmera, l'angle θ entre els eixos pot ser lleugerament diferent de 90 graus, de la mateixa manera que els píxels poden no ser quadrats perfectes i, per tant, les unitats horitzontals i verticals no han de ser necessàriament iguals.

La conveniència d'usar aquest sistema de coordenades és fàcil d'explicar: suposem que hem fet dues fotografies amb una càmera digital d'una torre des de dues posicions diferents. Per fer una reconstrucció 3D en el nostre ordinador a partir de les dues imatges, el primer que necessitem és reconèixer en cada imatge punts «que es corresponen», o sigui que provenen del mateix punt de la realitat. En particular, necessitem referir-nos a punts concrets de cada imatge d'una manera manejable i quina altra manera millor hi ha que fer-ho dient, per exemple: el punt més alt de la torre ha sortit representat en la primera fotografia en el punt que està 3240 píxels cap a la dreta i 5329 cap avall?

Aquest canvi de coordenades comporta l'entrada en escena d'una de les matrius que tenen un paper més central en tot el problema: la *matriu de calibratge*. Consisteix en la matriu que transforma les coordenades que havíem pres inicialment en el pla $z = f$ en les coordenades píxel que hem considerat després.



En el dibuix superior, els vectors v_1 i v_2 són determinats per la forma del píxel, mentre que els vectors e_1 i e_2 corresponen a la base ortogonal que estem utilitzant a l'espai. Anomenem k_h i k_v el quocient entre la unitat de mesura que utilitzem (centímetres, mil·límetres...) i la grandària horitzontal, respectivament vertical, d'un píxel. Dit d'una altra manera, k_h i k_v ens diuen quants píxels caben en una unitat. L'angle θ mesura quant dista el píxel de ser rectangular (habitualment és gairebé de 90 graus). Obtenim fàcilment les fórmules:

$$\begin{aligned} e_1 &= k_h \cdot v_1, \\ \cos(\theta) \cdot e_1 + \sin(\theta) \cdot e_2 &= k_v \cdot v_2. \end{aligned}$$

Finalment, si (u_0, v_0) són les coordenades (píxel) del punt principal, trobem de les igualtats anteriors que la matriu del canvi de referència o matriu de calibratge és com segueix:

$$K = \begin{pmatrix} k_h & -\cotan(\theta) \cdot k_u & u_0 \\ 0 & \frac{k_v}{\sin(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dedicarem la propera secció a posar en relleu l'interès i les formes de càlcul de la matriu de calibratge. Ara, per cloure aquesta discussió sobre la modelització de la càmera estenopeica (*pinhole camera*), notem que la matriu associada a la càmera, amb la màxima generalitat possible, la podem escriure de la forma:

$$K \cdot A \cdot \bar{R},$$

on $\bar{R}$ és la matriu de quatre files i quatre columnes corresponent a una rotació R seguida d'un vector (columna) de translació t :

$$\bar{R} = \left(\begin{array}{c|c} R & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

5 Com podem saber com és per dins la càmera: un cop de martell?

Aturem-nos un moment en la informació que proporciona la matriu de calibratge que ens acaba d'aparèixer: els cinc paràmetres k_h , k_v , θ , u_0 , v_0 ens diuen com és la càmera per dintre. Fixem-nos que bàsicament ens indiquen la disposició i la forma dels sensors i, també, la posició relativa del centre i del pla retinal. Per això se'ls anomena *paràmetres interns*. Caldria afegir-hi la distància focal f , però la deixarem de banda atès que farem la nostra reconstrucció 3D sense atendre el factor d'escala. Esbrinar tots aquests valors és el que es coneix per *calibrar la càmera*. Per comoditat, suposarem que f és la nostra unitat de mesura, de manera que A és de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

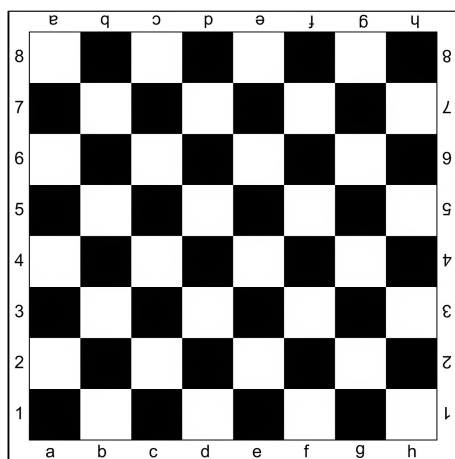
Ara podem simplificar per obtenir la matriu de tres files i quatre columnes

$$A \cdot \bar{R} = (R \mid t).$$

Així doncs, la matriu de la càmera es pot escriure de la forma:

$$K \cdot (R \mid t).$$

Però tornant al problema que hem plantejat: com podem calibrar la nostra càmera? Òbviament, el recurs de desmuntar-la de manera més o menys violenta (amb un tornavís o un cop de martell) és poc viable. La solució que s'aplica és força imaginativa. Tot i la seva complexitat quan es posa a la pràctica, se'n pot explicar la idea essencial en poques paraules. Comencem per triar objectes dels quals tinguem una informació mètrica molt precisa (en diem *patrons*) i en fem fotografies amb la nostra càmera. Els patrons possibles poden ser de molts tipus i s'ha de tenir present que seleccionar-ne uns o altres pot incidir en la precisió dels nostres resultats. Per fixar idees, pensem en un de ben simple i molt utilitzat: un tauler d'escacs amb caselles blanques i negres.



És una figura plana, la qual cosa introdueix un lligam en les coordenades espacials dels punts, conté molts parells de rectes formant angle recte i té molt contrast entre els dos costats de cada recta. Aquesta darrera propietat té un pes important en la part de la història que deliberadament estem amagant sota la catifa: el *processament de la imatge*, del qual parlarem una mica més avall. Suposem de moment que, un cop fetes les fotografies dels patrons, podem reconèixer en cada imatge quines coordenades píxel tenen els vèrtexs del tauler. A partir d'aquí, el mètode és relativament simple tot i que prou feixuc com per no descriure'l amb detall: diguem, simplement, que és fàcil saber quines propietats mètriques del tauler d'escacs físic són heretades per la seva imatge fotogràfica i que, en imposar-les, trobem les equacions que permeten calcular-ne els paràmetres interns i, per tant, calibrar la càmera.

Aquesta idea tan naïf està envoltada de dificultats que requereixen l'ús de tècniques molt variades. Per començar, si intentem obrir amb un editor una fotografia en format JPG, tindrem dificultats serioses, ja que és un format comprimit que s'utilitza per disminuir sensiblement la grandària del fitxer i que, per tant, perd informació. No podem aquí estendre'ns en aquest tema, però val la pena esmentar que aquesta compressió s'aconsegueix amb la intervenció decisiva de la transformada de Fourier en la seva versió discreta. Un cop descomprimida,

tindrem un fitxer de text ple de xifres agrupades de 9 en 9. Cadascun d'aquests blocs consta de tres enters que varien entre 0 i 255. Per exemple, si el fitxer comença per

000 000 000

voldrà dir que el píxel de la cantonada superior esquerra és negre, i si comença per

255 255 255,

el píxel serà blanc. La teoria del processament d'imatges ens ensenya a extreure informació a partir d'un fitxer com aquest. Una tècnica bàsica molt útil per al tipus de fotografia que tenim (no ho oblidem: un tauler d'escacs en blanc i negre) consisteix a restar a cada codi de color el codi del píxel precedent. D'aquesta manera, mirant els codis no nuls, detectarem aproximadament les línies que envolten les caselles. És un primer pas que dóna resultats molt minsos i que s'ha de completar amb moltes altres tècniques més elaborades per detectar formes, aïllar-les, segmentar-les... El lector curiós pot descobrir les bases d'aquesta vasta àrea de la computació donant un cop d'ull, per exemple, al llibre de Gonzalez-Woods [2].

Completada amb èxit l'anàlisi de la fotografia, disposarem de la informació aproximada que busquem. Salta a la vista que els errors són consubstancials al procés, en primer lloc, per la naturalesa discreta de les dades inicials. Així doncs, el càlcul dels nostres paràmetres intrínsecs estarà contaminat d'aquestes imprecisions. Per minimitzar l'error, realitzarem més fotografies del patró de manera que el nostre sistema d'equacions serà sobredeterminat. Finalment caldrà usar mètodes d'àlgebra lineal numèrica, majoritàriament basats en la descomposició SVD de les matrius, per trobar una solució òptima. No ens endinsem en cap d'aquests passos que hem descrit de manera tan superficial perquè el nostre objectiu és focalitzar-nos en la part geomètrica de la reconstrucció 3D, però esperem haver fet intuir la varietat de tècniques matemàtiques i de computació que intervenen en la solució d'aquest problema.

6 Dues vistes

Com veurem de seguida, la reconstrucció 3D es basa en dos pilars: conèixer les càmeres per dins i saber la posició relativa de les càmeres en el moment en què es fan les dues fotografies. Per tractar aquesta segona qüestió, ens trobem en una disjuntiva semblant a la del calibratge: usem la cinta mètrica, el transportador d'angles, un mesurador làser o qualsevol eina física més o menys moderna?; o, per contra, usem les fotografies fetes per la mateixa càmera per extreure la informació necessària per determinar la situació de les nostres càmeres? És clar que ens decantarem per la segona possibilitat, però és un camí que no està lliure d'algunes dificultats. Observem primer que el que pretenem calcular és de nou una informació matricial. En efecte, si posem com a origen de coordenades la primera càmera, o sigui, si suposem que la primera càmera té la matriu:

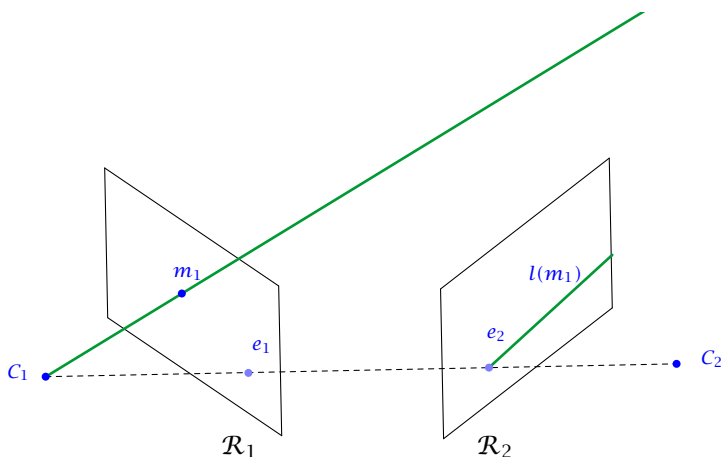
$$M_1 = K_1 \cdot (I_3 \mid 0)$$

(I_3 és la matriu identitat 3 per 3), aleshores la segona serà

$$M_2 = K_2 \cdot (R \mid t),$$

i la parella R, t és exactament la informació buscada: com cal rotar i traslladar la primera càmera per superposar-la a la segona.

El nostre objectiu en aquesta secció és descriure un pas intermedi en la recerca de R i t , que queda per a més endavant. Per fer-ho incorporem una nova definició que resulta molt intuïtiva: direm que dos punts m_1 i m_2 , un de cada pla retinal, són *corresponents* si tots dos provenen del mateix punt del món. Per exemple, si fem dues fotografies d'un campanar i n'assenyalem a cada fotografia el punt més alt, estem seleccionant una parella de punts corresponents. En aquest exemple utilitzem la nostra capacitat per reconèixer objectes visualment i és just això el que volem evitar. Una mica de geometria ens pot ajudar a donar estructura als punts corresponents. Comencem per observar que, donat un punt m_1 en el primer pla retinal, hi ha molts punts potencialment corresponents amb ell en el segon pla. En efecte, unim m_1 amb el centre de la càmera i suposem, de manera ideal, que la recta així determinada es pot pintar d'algun color, com si fos un raig làser.



La fotografia amb la segona càmera de la recta acolorida dibuixa en el segon pla retinal una recta $l(m_1)$. Tenim així una aplicació que associa a les tres coordenades (projectives) del punt m_1 els tres coeficients de la recta $l(m_1)$ i que, per sort, és lineal. Així doncs, tenim una matriu de tres files i tres columnes F , anomenada *matriu fonamental*, que determina aquesta aplicació. Cal remarcar dues propietats importants per entendre i calcular F (e_1 i e_2 són, com s'indica en el dibuix, els talls de la recta C_1C_2 amb els dos plans):

- La matriu té rang 2: com es pot observar en la figura superior totes les rectes $l(m_1)$ passen pel punt e_2 (anomenat *epipol*); per tant, no podem esperar exhaustivitat. De la mateixa manera, no és injectiva ja que tots els punts de la recta que passa per e_1 i m_1 tenen la mateixa recta $l(m_1)$ associada.

- b) No costa gaire adonar-se que una parella de punts (m_1, m_2) són corresponents si, i només si, tenim la relació $m_2^T F m_1 = 0$.

Veurem que la matriu fonamental és la peça que permet trobar les matrius R i t , és a dir, la posició relativa entre les càmeres. És, doncs, important aprendre a calcular-la. Les propietats anteriors donen una idea de com es fa: suposem que tenim una col·lecció de punts corresponents proporcionada per alguna tècnica de processament d'imatges. Imposant la propietat b) tindrem un sistema d'equacions que permetrà calcular els coeficients de F . Un algorisme molt conegut és el dels *set punts*: s'imposa que set parelles de punts siguin corresponents. Com que la nostra matriu està determinada llevat de múltiple, arribem a una família de solucions possibles que depenen d'un paràmetre. Demanant que el determinant sigui zero obtenim un polinomi de tercer grau que, habitualment, només té una solució real i, per tant, determina F . Cal remarcar que un cop trobada la matriu fonamental tenim una eina addicional per al càlcul de parelles corresponents: d'una banda la propietat b) ens dóna una restricció que permet descartar correspondències falses, i de l'altra, es pot usar F per *rectificar* les fotografies de manera que les línies epipolars $l(m_1)$ siguin totes horitzontals, la qual cosa simplifica la localització de parelles de punts corresponents.

Finalment, abans de cloure la secció, un esment de la dificultat de trobar punts corresponents. Hi ha molts mètodes i, sovint, les tècniques més eficients són combinacions de molts d'ells. Una idea molt simple però que dóna una primera aproximació al problema és la següent: considerem finestres petites de píxels dins de cada fotografia; per exemple, quadrats de 5 per 5 píxels. Cada quadrat es pot veure com una matriu en la qual les entrades són els codis RGB dels píxels. Prenent alguna noció de distància entre matrius, podem provar d'identificar quadrats molt propers d'una i altra fotografia. Si la distància és realment molt petita, això ens indica que possiblement els centres dels quadrats es corresponen.

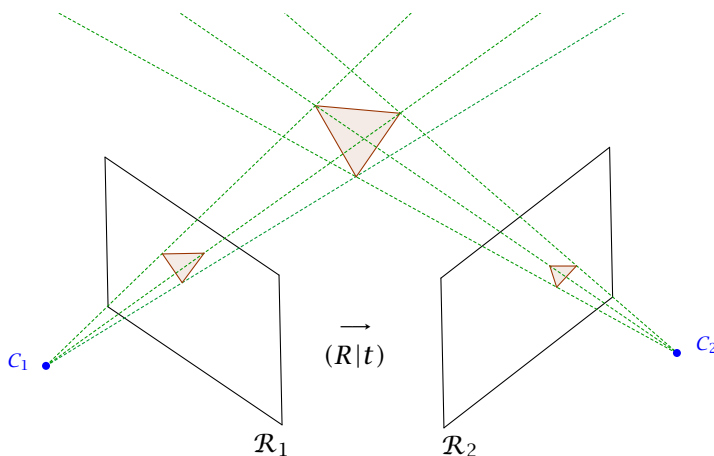
7 Reconstrucció 3D

En aquesta secció explicarem com es porta a terme la reconstrucció partint de les eines introduïdes en les darreres seccions: suposem que hem sabut calibrar les càmeres i, per tant, que coneixem les matrius K_1 i K_2 , que hem calculat també de la matriu fonamental F i, finalment, que disposem d'una bona col·lecció de parelles de punts corresponents $P = \{(m_{1,i}, m_{2,i})\}$. Abans de dir què podem fer amb tota aquesta informació, un comentari sobre el conjunt P : la facilitat per obtenir una col·lecció P amb molts punts i de molta «qualitat» dependrà del tipus d'entorn que intentem reconstruir. Òbviament, dues fotografies del mateix cel blau ens donaran poques oportunitats per trobar parelles significatives, i la reconstrucció no tindrà cap sentit. De la mateixa manera, pot passar que un punt del món surti en una de les fotografies i no en l'altra i, per tant, no originarà una parella de punts corresponents. Salta a la vista que el nostre objectiu serà més complicat en fotografies fetes a la natura que les que es fan en l'entorn urbà o en un espai tancat on abunden les línies rectes, els canvis molt contrastats de colors i els volums més geomètrics (de vegades es diu que és un *entorn estructurat*).

Tornant al nostre discurs inicial, ja hem comentat que podem suposar que les matrius que modelitzen les nostres càmeres són de la forma:

$$M_1 = K_1 \cdot (I_3 | 0) \quad \text{i} \quad M_2 = K_2 \cdot (R | t).$$

Si realment coneixem les dues càmeres, o sigui, si obtenim K_1 , K_2 , R i t , podem esperar que els punts del món P dels quals provenen les nostres parelles es puguin calcular. En efecte, conèixer les matrius de calibratge equival a saber on està posat el centre de cada càmera en relació amb els plans retinals corresponents. A més a més, R i t ens donen la posició relativa entre les dues càmeres; per tant, podem passar un raig de llum pel centre de la primera càmera i un punt $m_{1,i}$ i un altre raig de llum pel centre de la segona càmera i per $m_{2,i}$, i obtenim dues rectes que es tallaran en el punt que estem buscant. Bé, en realitat el més probable, a causa dels errors acumulats, és que no es tallin sinó que passin molt a prop, de manera que caldria trobar els punts de cada raig que minimitzen la distància i prendre el punt mitjà.



En realitat el que acabem de dir pretén donar la idea de per què la informació K_1 , K_2 , R , t és la necessària per a la reconstrucció 3D; però, pel que fa al càlcul, el plantejament és lleugerament diferent: el punt X_i del món que correspon al parell $(m_{1,i}, m_{2,i})$ és la solució de

$$M_1 \cdot X_i = m_{1,i},$$

$$M_2 \cdot X_i = m_{2,i}$$

(les coordenades de X_i s'han d'escriure «normalitzades», o sigui, $X_i = (x_i, y_i, z_i, 1)$). Utilitzant tècniques d'àlgebra lineal numèrica obtenim, sempre aproximadament, les coordenades del punt buscant.

Com a resum d'aquesta secció, podem dir que el problema de la reconstrucció queda reduït al càlcul de les matrius R i t a partir de les dades K_1 , K_2 i F . Aquest és el contingut de la propera secció.

8 La matriu essencial i la seva descomposició

En arribar a aquest punt hem convertit el problema de la reconstrucció 3D en un problema purament matricial: gràcies a una combinació de mètodes molt variats hem aconseguit disposar de les matrius K_1 , K_2 , F (aquesta darrera determinada llevat de multiplicar per una constant) i una col·lecció de parelles de punts corresponents. Segons el que hem explicat en la darrera secció, per acabar només ens queda calcular la matriu de rotació R i el vector de translació t . El resultat crucial en aquesta part de la teoria és la relació següent (entre matrius de tres files i tres columnes de rang 2):

$$K_2^T F K_1 = [t]_x \cdot R,$$

on $[t]_x$ és una matriu antisimètrica construïda a partir del vector de translació $t = (t_1, t_2, t_3)$ de la forma següent:

$$[t]_x = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquesta relació posa de manifest de manera explícita el que ja havíem avançat: la matriu fonamental codifica la posició relativa entre les càmeres. Val a dir que la matriu $E := K_2^T F K_1$ que apareix a la relació rep a la literatura el nom de *matriu essencial*. Observem que és calculable a partir de les nostres dades i que el que volem és descompondre E en el producte $[t]_x \cdot R$. Justifiquem ara que això es pot fer de manera única, llevat de signe. O sigui, en realitat hi ha quatre descomposicions possibles de les quals només una és la que ens convé. No és gaire difícil eliminar *a posteriori* aquesta indeterminació: si agafem un signe inapropiat per a R o per a t , ho notem en el fet que el conjunt de punts P que usem per a la reconstrucció 3D queda situat «al mateix costat» que el centre d'alguna de les càmeres en relació amb el pla retinal.

Recuperació de t

Atès que la matriu E està determinada llevat de la multiplicació per una constant, comencem per normalitzar-la d'alguna manera. Imposem que la norma de la matriu sigui 1, $\|E\| = 1$. Usem com a norma l'euclidiana de $\mathbb{R}^9$ després d'identificar la matriu amb un punt d'aquest espai. És a dir, estem imposant que la suma dels quadrats de les entrades de la matriu sigui 1. Així E quedarà fixada llevat de signe. Aquesta norma de matrius que estem considerant té propietats força agradables. Per exemple, és fàcil comprovar que la norma al quadrat d'una matriu A és la traça (suma dels elements de la diagonal) de la matriu $A \cdot A^T$. En particular, si suposem E ja descomposta, $E = [t]_x \cdot R$, tenim:

$$\begin{aligned} \|E\|^2 &= \text{traça}(E \cdot E^T) = \text{traça}([t]_x \cdot R \cdot R^T \cdot [t]_x^T) = \\ &= \text{traça}([t]_x \cdot [t]_x^T) = \|[t]_x\|^2 = 2\|t\|^2. \end{aligned}$$

Per tant, fixar la norma de la matriu essencial equival a fixar la norma del vector de translació $\|t\|^2 = \frac{1}{2}$. Per un altre costat observem que:

$$E^T = R^T \cdot [t]_x^T = -R^T \cdot [t]_x.$$

Atès que la matriu $[t]_x$ té nucli $\langle t \rangle$ i R té determinant no nul, el nucli de E^T i la condició sobre la norma ens proporcionen, llevat de múltiple, el vector de translació t .

Unicitat llevat de signe de la descomposició

Un cop el vector de translació t és conegut, la matriu R queda determinada per les equacions:

$$\begin{aligned} E &= [t]_x \cdot R, \\ R \cdot R^T &= I_3. \end{aligned}$$

Notem que no podem «aïllar» R en funció de E i $[t]_x$ perquè la segona matriu no és invertible. Aquest sistema té una única solució (deixant de banda el signe). La demostració es basa en un bonic argument geomètric que volem compartir amb el lector que ha aconseguit arribar fins aquí. Suposem que tenim:

$$E = [t]_x \cdot R = [t]_x \cdot R',$$

on R' és una altra rotació. Aleshores, multiplicant per la dreta amb la matriu transposada de R' tenim

$$[t]_x \cdot R \cdot R'^T = [t]_x.$$

Transposant tota la igualtat, ens queda que la rotació $R_0 = R' \cdot R^T$ satisfà:

$$R_0 \cdot [t]_x = [t]_x.$$

Hi ha una característica de les matrius $[t]_x$ en la qual no hem incidit fins ara i que és molt fàcil de comprovar usant la seva definició: per a qualsevol vector de l'espai u , la imatge $[t]_x(u)$ és simplement el producte vectorial $t \wedge u$. Per tant, la imatge de l'aplicació amb matriu $[t]_x$ és el subespai vectorial de dimensió 2 format pels vectors ortogonals a t . La igualtat obtinguda més amunt ens diu que R_0 deixa invariants (són vectors propis de valor propi 1) tots els vectors ortogonals a t . Atès que una rotació de l'espai que no sigui la identitat només deixa invariants els vectors d'un subespai de dimensió 1 (el seu eix), tenim que $R_0 = I_3$ i, per tant, $R = R'$.

9 Resum i conclusió

Si fem una llista ordenada dels processos que han intervingut en el mètode explicat per a la reconstrucció 3D, trobem:

- a) En primer lloc, calibrem les càmeres usant fotografies de patrons.
- b) A continuació, localitzem amb tècniques de processament d'imatges algunes parelles de punts corresponents.
- c) Aquestes parelles de punts ens permeten calcular la matriu fonamental mitjançant, per exemple, el mètode dels set punts.
- d) Usant la informació proporcionada per la matriu fonamental, rectifiquem les fotografies i calculem més parelles de punts corresponents.
- e) Calculem la matriu essencial i la seva descomposició en rotació i translació.
- f) Calculem els punts del món que corresponen a les parelles de punts corresponents.

Aquesta llista de procediments que barregen geometria lineal i projectiva, àlgebra lineal numèrica, mètodes d'optimització, processament d'imatges i programació, entre d'altres, dona una idea de la varietat i transversalitat a la qual fèiem referència a l'inici d'aquestes notes.

NOTA. Les figures de les pàgines 183, 188 i 190 han estat realitzades amb el programa Geogebra.

Agraïments

Vull agrair afectuosament a Anna Puig i a Ferran Espuny la lectura d'una versió prèvia d'aquestes notes. Les seves aportacions han millorat notablement el resultat final.

Referències

- [1] ESPUNY, F. *Self-Calibration of Projective and Generic Central Cameras*. Tesi doctoral. Universitat de Barcelona, 2009.
- [2] GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Digital Image Processing*. 3a ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2008.
- [3] HARTLEY, R.; ZISSERMAN, A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA
UNIVERSITAT DE BARCELONA
jcnaranjo@ub.edu

English summaries

Natàlia Castellana

Once upon a time there was a fixed point...

One of the classical results we can find in the literature on Algebraic Topology is Brouwer's Fixed Point Theorem, proved using covering spaces techniques, fundamental group calculation and homology groups. In this paper we present a proof based on a lemma from topological combinatorics, Sperner's Lemma, which avoids the techniques mentioned above.

Keywords: algebraic topology, combinatorics, fixed point.

MSC2010 Subject Classification: 55M20, 91A06.

Carlos D'Andrea

Moving curves ideals and their interaction with computer-aided geometric design

We present a case of fruitful interaction between Commutative Algebra and Computer-Aided Geometric Design. Some challenges in this applied and increasingly important area of informatics have been shifted to abstract algebraic structures, and have enriched Mathematics with several theoretical results and open problems which we explain in this text.

Keywords: rational parameterizations, plane curves, Rees Algebras, μ -bases, minimal generators.

MSC2010 Subject Classification: Primary: 14H50; Secondary: 13A30, 68W30.

Joan Girbau*Detection of gravitational waves*

The aim of this paper is to present the basic theory of gravitational waves for mathematicians with knowledge of general relativity and explain the methods that can be used to detect them. We will also explain the main characteristics of the astronomical observation made on September 14, 2015 by LIGO's detectors.

Keywords: gravitation, gravitational waves, GW150914.

MSC2010 Subject Classification: 83C35.

Joan Carles Naranjo*Geometry in 3D reconstruction*

The goal of this paper is to describe the geometric fundamentals of the 3D reconstruction of a scene using two images obtained from two digital devices. We will start by explaining the camera model and its calibration. Then we will focus on the epipolar geometry which analyzes the relative position between the two cameras. This information is codified by the fundamental matrix in the non-calibrated case, and by the essential matrix in the calibrated case. Finally, we will describe how to effectively reconstruct the scene from the essential matrix.

Keywords: pinhole camera, calibration, fundamental matrix, essential matrix.

MSC2010 Subject Classification: 68T45.

Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial, per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2010.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi $\text{\TeX}$, preferentment en l'estil $\text{\LaTeX}$ propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per a separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per poder facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques. Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del BUTLLETÍ s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas el BUTLLETÍ publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

Els autors dels articles publicats al BUTLLETÍ en retenen el dret de còpia (*copyright*) i autoritzen l'IEC a difondre'ls, tant a través de la publicació impresa com mitjançant els portals digitals propis o d'altres amb què s'estableixin els convenis oportuns a aquest efecte. És responsabilitat dels autors assegurar que es disposa dels drets de reproducció dels gràfics i de les figures que hi apareguin. Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a la SCM.

Comitè editorial

Julia Cufi (editor en cap)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
jcufi@mat.uab.cat

Bartomeu Coll
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella
Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
fagella@maia.ub.es

Josep Maria Font
Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Universitat de Barcelona
jmfont@ub.edu

Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Gábor Lugosi
ICREA i Departament d'Economia
Universitat Pompeu Fabra
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
rcamps@mat.uab.cat

Jorge Mateu
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I
mateu@mat.uji.es

Marc Noy
Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
francesc.planas@upc.edu

Agustí Reventós
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
agusti@mat.uab.cat

Marta Sanz-Solé
Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Universitat de Barcelona
marta.sanz@ub.edu



Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans, que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de la **SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. La **SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de la **SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

La **SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies* i *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Els socis de la **SCM** reben, gratuïtament, aquestes dues publicacions.

La **SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de la **SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de la **SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de la **SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENT: Xavier Jarque i Ribera

VICEPRESIDENT: Enric Ventura i Capell

ADJUNTA DE LA VICEPRESIDÈNCIA: Iolanda Guevara i Casanova

SECRETARI: Albert Ruiz i Cirera

TRESORERA: Natàlia Castellana i Vila

VOCALS: Núria Fagella i Rabionet, Josep Grané i Manlleu, Agustí Reventós i Tarrida, Carles Romero i Chesa, Oriol Serra i Albó, Esther Silberstein, Manel Udina i Abelló

DELEGAT DE L'IEC: Joan Girbau i Badó

L'adreça de la **SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: scm@iec.cat. Adreça web: <http://scm.iec.cat>.

El Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El Butlletí està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al Butlletí aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El Butlletí publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El Butlletí es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del Butlletí pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <http://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap _____

Julia Cufí

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Editora adjunta _____

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè editorial _____

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Jorge Mateu

Departament de Matemàtiques

Universitat Jaume I

Núria Fagella

Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Universitat de Barcelona

Marc Noy

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Josep Maria Font

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Francesc Planas

Departament de Matemàtica Aplicada I

Universitat Politècnica de Catalunya

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Agustí Reventós

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Marta Sanz-Solé

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carme, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

scm@iec.cat - <http://scm.iec.cat>